KONTINUITETNA ENAČ: Predpost, da veljata zakon o ohranitvi mase in mehanika kontinuiuma (masa enakomer razpor po prost). Potem je čas. spr. mase v volumnu (P) enaka neto mas. pretoku skozi površ (S). Če za levi del uporab Gaussov teorem za

$$\iint_S \rho\vec{v}dS = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_P \rho dP$$

pretvorbo ploskov int. v prostorskega dobimo:

$$\iiint_P div(\rho\vec{v})dP + \iiint_P \frac{\partial\rho}{\partial t}dP = 0$$

Če integrala združimo dobimo:

$$\iiint_P\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v})\right)dP = 0 \Rightarrow \text{KONT. EN.:} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Poenostavitve: Stalni tok ($\delta/\delta t=0$) → div(ρv)=0. Stalni tok + nestis. tek. (ρ=konst.) → $\partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z=0$ **Za tekočinsko cev:** -cevke, ki jim plašč sestavljajo same tokovnice -vekt hitr je na njihov plašč tangencialen, skozi stene ni pretoka Neto masni pretok skozi površ je enak rezliki med dotokom na eni in odtok na drugi strani: $\iint_S \rho^*\bullet v^*\bullet dS = \rho^*A^*v - \partial(\rho^*A^*v)/\partial s\ ^*\sigma_s/2 - [\rho^*A^*v + \partial(\rho^*A^*v)/\partial s\ \sigma_s/2] = -\partial(\rho^*A^*v)\sigma_s/\partial s$ Zaradi ohr. mase je čas. spr. mase = neto masnemu pretoku: $\partial(\rho^*A^*v)\sigma_s/\partial t = \partial(\rho^*A^*v)\sigma_s/\partial s \Rightarrow \partial(\rho^*A)/\partial t + \partial(\rho^*A^*v)/\partial s = 0$ Pri nestisljivi tekočini je ρ=konst. $\Rightarrow \partial A/\partial t + \partial(A^*v)/\partial s = 0$, če pa je tudi pojav stalen $\Rightarrow \partial(A^*v)/\partial s = 0$ Vse oblike K. enačbe veljajo za idealno in realno tekočino. **DINAMIČNA ENAČ:** Zveza med napetostmi in deformacijsko hitr za tekočine: →Posplošeni Newt. zakon oz. Stokesov zakon. Tenzorski zapis zakona: $\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}+2\mu(f_{ij}- 1/3\ \text{div}\ v\cdot\ \delta_{ij})$

$$f_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Izpeljava dinamične enačbe:

$$m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma\vec{F} \qquad \iiint_P \rho\frac{d\vec{v}}{dt}dP = \iiint_P \vec{F}_m\rho dP + \iint_S[\sigma]d\vec{S}$$

Zadnji člen pretvorimo po Gauss. izreku, ki velja tudi za pretvorbo tenzorske količine napetosti [σ]:

$$\iiint_P \rho\frac{d\vec{v}}{dt}dP = \iiint_P \vec{F}_m\rho dP + \iiint_P div[\sigma]dP$$

Če to upošt. in združ. vse volumske integrale, dobimo:

$$\iiint_P\left(\rho\frac{d\vec{v}}{dt} - \rho\vec{F}_m - div[\sigma]\right)dP = 0$$

Izraz pod integral mora biti enak 0. Enačb še malo preuredimo in dobimo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_m + \frac{1}{\rho}div[\sigma]$$

Če upoštevamo, da je:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(f_{ij} - \frac{1}{3}div\vec{v}\delta_{ij})$$

in da je $\nu = \mu / \rho$, dobimo Navier – Stokesovo t.i. dinamično enačbo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho}gradp + \nu\Delta v + \frac{\nu}{3}grad(div(\vec{v}))$$

Prvi člen predstavlja lokalni in konvekcijski posp., drugi člen vpliv masnih sil, tretji vpliv tlačnih sil, četrti vpliv viskoznih sil, zadnji pa vpliv stisljivosti. Pri nestisljivih tekočinah odpade zadnji člen, za ideal. tekočino pa odpadeta zadnja člena, tako da dobimo t.i. Eulerjevo Enačbo = dinamična enačba za idealno tekočino:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho}gradp$$

ENAČBA STANJA: f(ρ,p,T)=0, p=f(ρ,T), ρ=f(p,T) **Kapljevine:** m=konst., d(m)=0 $\Rightarrow$ m=ρP d(ρP)=0 $\Rightarrow$ -dp/P = dρ/σ $\Rightarrow$ -dρ/ρ = dp/p = -χdp χ…stisljivost $\Rightarrow$ K=1/χ Pri kapljevini se modul stislji le malo spreminja z tlakom, zato je ob K=konst. enačba dρ/ρ = (1/K)dp , neke vrste enačba stanja. **Plini:** Iz enačbe stanja idealnih plinov sledi: T=konst. p/ρ = RT/M = konst. = p_0/ρ_0 d(p/ρ) =0 $\Rightarrow$ dp/p = dρ/ρ $\Rightarrow$ K = p …modul stisljivosti je enak tlaku. **BERNOULLI. oz. ENERGIJ. ENAČBA:** Če kot masna sila nastopa le težnost in če je tekočina nestisljiva, sledi: U =gz in P =p/ρ Od tod dobimo enačbo: $v^2/2$ + p/ρ + gz =konst. Če dobljeno enačbo množimo z ρ dobimo Bernoulli enačbo: $\rho v^2/2$ + ρgz + p =konst. Če le to delimo z ρg pridemo do oblike, ki jo imenujemo energij. enačba: $v^2/2g$ + z + p/ρg =konst. = E **Primeri uporabe energijske enačbe:** 1) Cevovod s spremen. prerezom (vzpor. tokovnice) 2)Toricellijeva enačba 3) Kavitacija 4)Vrteča se posoda **Kavitacija:** Ko tekočina teče v področje nižjega tlaka na tlak vodne pare se začne izparevanje (vrenje). Tvorijo se mehurji vodne pare, ki potujejo s tekočino, dokler ne pridejo v področje z višjim tlakom, kjer se naglo utekočinijo. Ta pojav imenujemo kavitacija. Najbolj so ji izpostavljena mesta, kjer imamo naglo spr. preseka, predvsem razširitve. **HIDROSTATIKA:** Tekočine mirujejo, določimo le ρ in p. •v=0 , idealne tekočine: μ=0, ν=0 Dinamična enačba dobi obliko: •F – (1/ρ)*grad_p =0 **Statika stisljivih tekočin**: $\rho\neq$konst. Edina masna sila, ki deluje na delec tekočine je njegova težnost: •F=(0,0,-g). Za reševanje uporabljamo še tretjo enačbo: p/ρ=RT. Če je T=konst $\Rightarrow$ p/ρ=konst.. Stisljivost in modul stisljivosti: Izhajamo iz pogoja konst. mase: m=$\rho\cdot$p= konst. Zato je ρdP=-Pdρ. Ker je v sploš. gostota funkc. tlaka je tudi: -(dρ/ρ)=dP/P= -χdp. χ imenujemo stisljivost:

$$\chi = \frac{d\rho/\rho}{dp} = -\frac{dP/P}{dp}$$

Večkrat uporabljamo modul stisljivosti K=1/χ. Za pline lahko dobimo odv. modula stisljivosti od tlaka na sledeči način: Uporabimo enač. stan. za idealne pline: p/ρ=RT=konst. Z odv. enačbe dobimo izraz za modul stisljivosti d(p/ρ)=0, in ker $\rho\neq$0 dobimo: P=dp/(dρ/ρ)=K. Torej je modul stisljivosti enak absolut. tlaku p. Za kapljevi. lahko navadno privzamemo, da je K=konst. in gostoto zapišemo kot:

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{p-p_0}{K}}$$

Statika nestisljive tekočine: ρ=konst, p=p(z). Osnovna enačba hidrostatike: $p_A=p_0+\rho gh_A$ določa zvezo med p in h. **SILA HIDROSTAT. TLAKA: Sila:** dF=pdS=ρg(z_0-z)dS Delamo v rel. sist., torej je p_0=0. F=ρg·$\int_S$(z_0-z)dS. Izraz pod integralom je statični moment ploskve S glede na ravnino gladine G: $M_{SG}=\int_S(z_0-z)dS=S(z_0-z_T)$. Tako dobimo izraz za silo: F=ρgh_TS, kjer je S v splošni ravnini, h_T pa v vert. ravnini. Enačba splošno velja, ne glede na to, kakšen je kot nagiba α. **Prijemališče:** $M_{FG}=F(z_0'-z_S')=\int_S(z_0'-z')dF$. $\int_S(z_0'-z')\rho g(z_0-z)dS=\rho gh_TS\cdot h_S'$. $\rho g\cdot\sin\alpha\cdot\int_S(z_0'-z')^2dS=\rho gh_TS\cdot h_S'$ I_G=vztraj. mom. ploskve= $\int_S(z_0'-z')^2dS=I_T+S\cdot(z_0'-z_T')^2$ $I_T+h_T'^2S=h_T'Sh_S'$;če delimo z h_T'S, dobimo:

$$h_S' = h_T' + \frac{I_T}{h_T'S}$$

=Izraz za prijemališče sile.

Sila HP tlaka in prijemališče na krivo ploskev: dF=pdS $\Rightarrow$ $dF_x=\rho ghdS_{yz}$ $\Rightarrow$ $\int_S dF_x=F_x=\rho g\int hdS_{yz}$ $\Rightarrow$ $F_x=\rho\ g\ h_{Tyz}\ S_{yz}$ $F_y=\rho gh_{Txz}\ S_{xz}$ $F_z=\rho gP_v$ **Prijemališče:** skupna sila: $h'_s = h'_T + J_T/h'_T*S$ Po komponentah: $h_{SX} = h_{TX} + J_{TX}/h_{TX}*S_{YZ}$ … **STABILNOST PLAVANJA:** Stabilnost plavanja je odv. od medsebojne lege težišča plavajočega telesa C_G in prijemališča vzgona C_W. Za popoln potopljena telesa je plavanje stabilno, če $y_{CG}<y_{CW}$. Za plavajoča telesa je plavanje stabilno, če je razdalja MC_G>0, oz. če je razdalja C_wM = I/P> razdalje C_WC_G. **Izpeljava metacent razdalje:** $\partial M=\partial F\cdot x=(\rho gx\cdot tg\theta\cdot dS)\cdot x$ mali koti nagiba $\Rightarrow$ tg$\theta \approx \sin\theta \approx \theta$. M = $\int_S\partial M = \rho g\theta\int_S x^2\partial S = \rho g\theta\cdot I$. I je vztr. moment ploskve. M=W·r=ρgPr = $\rho g\theta$I $\Rightarrow$ r=$\theta\cdot$(I/P). r=razdalja. $C_wM \times \sin\theta \approx$ razdalja $MC_w\times\theta$. razdalja $MC_w\cdot\theta = \theta\cdot$(I/P) razdalja MC_w=(I/P) razdalje ($MC_G=MC_w\pm C_wC_G$) **Določanje kota nagiba:** F·d=G×$MC_G\cdot\sin\theta$. **Stabilnost pri velikih kotih θ > 15°:** Za vsak naklonski kot določimo prijemališče vzgona C'_W in izračunamo uravnalni moment M_V =G*L. Dobimo funk. M_u = f(θ), ki poda stabilno karakteristiko. Računi so zamudni, zato krivuljo laže dobimo z modeli.

KINEMATIKA: **Tokovnice** (streamlines) so črte, ki v vseh točkah prostora spajajo smeri hitrosti. Torej so hitrosti v vseh točkah tangencialne na tokovnice. **Trajektorije** (pathlines) so črte po katerih se gibljejo posamzni delci tekočine. **Sledi** (streaklines) so črte, ki v istem trenutku spajajo vse tekočinske delce, ki so v teku opazovanega časa šli skozi isto točko. **Lastnosti tokovnic:** Pravokotno na tokovnice ni pretoka. Med dvema tokov. teče vedno enak pretok. Med seboj se ne sekajo, razen v singularnih točkah. Trdni obrisi objektov so tokovnice, razen v primeru odlepljanja tokovnic. Primere nestalnega toka lahko ob primerni izbiri koord. sist. pretvorimo v primere stalnega toka. **Enačba tok.:** dx/u = dy/v = dz/w **Ekvipotencialne črte:** So družina krivulj vzdolž katerih je $\Phi(x,y)$ =konst. (hitrostni potencial se ne spreminja) **Cauchy-Riemannove enačbe:** $u = \partial\Phi/\partial x = \partial\psi/\partial y$; $v = \partial\Phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x$ V polarnih koor.: $v_r = \partial\Phi/\partial r = (1/r)\partial\psi/\partial\theta$; $v_\theta = (1/r)\partial\Phi/\partial\theta = -\partial\psi/\partial r$

KELVINOV TEOREM: Izhajal je iz osnovne dinamične enačbe za nestisljive tekočine:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradp + \nu\Delta\vec{v}$$

Vse člene je integriral po zaključeni krivulji:

$$\oint \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \oint \vec{F} d\vec{r} - \oint \frac{1}{\rho} grad\ \ p\ \ d\vec{r} + \oint \nu\Delta\vec{v}$$

Dokažemo, da je prvi člen na levi str. enačbe enak časovnemu odvodu cirkulacije Γ:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{d(\vec{v}d\vec{r})}{dt} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} + \oint \vec{v} d\vec{v}$$

Zadnji člen je zaradi krožne integracije enak 0. Če je polje tlakov stacionarno, ni pa funkc. časa, lahko drugi člen na desni str. enačbe spremenimo v:

$$\oint \frac{1}{\rho} gradpd\vec{r} = \oint \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = \oint \frac{dp}{\rho}$$

in dobimo t.i. Kelvinovo enačbo:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \vec{F} d\vec{r} - \oint \frac{dp}{\rho} + \oint \nu\Delta\vec{v} d\vec{r}$$

Prvi člen je moment masnih sil (teža, coriolisova), drugi moment tlačnih sil, tretji pa moment viskoznih sil. Če imamo barotropno stanje, od masnih sil deluje le teža, vpliv viskoznih sil pa je zanemarljiv, potem se nevrtinčni tok ne more spremeniti v vrtinčnega. Helmholtzovi zakoni veljajo, če so vsi členi na desni enaki nič. **Helmholtzovi zakoni:** 1) Vrtinčnice se nikjer v tekočini ne končajo. Tvorijo bodisi zaključene krivulje, bodisi se končajo na robovih računskega področja tekočinskega polja. 2) Cirkulacija je enaka za vsako konturo, ki vsebuje vrtinčnico. 3) Tekočinska linija, ki je istočasno vrtinčnica, ostane vedno vrtinčnica. Razmerje (rot $\vec{v}/\rho \cdot l$) = konst **Funkcija toka ψ:** je funkcija določena le do neke poljubne konstante. Obstaja tako za vrtinčni kot za nevrtinčni tok. Definicija:

$\psi_P - \psi_A = u \cdot \delta y \cdot 1 = \delta\psi = u\delta y \Rightarrow u = (\delta\psi/\delta y)$, limita, ko gre δy proti 0, $u = (\partial\psi/\partial y)$

$\psi_P - \psi_A = -v \cdot \delta x \cdot 1 = \delta\psi = -v\delta x \Rightarrow v = -(\delta\psi/\delta x)$, limita, ko gre δx proti 0, $v = -(\partial\psi/\partial x)$

$\psi_P - \psi_A = \delta\psi = v_r \cdot r \cdot \delta\theta \Rightarrow v_r = (\delta\psi/r \cdot \delta\theta); v_r = (\Delta\psi/r \cdot \Delta\theta)$

$\psi_P - \psi_A = \delta\psi = v_\theta \cdot \delta r \Rightarrow v_\theta = -(\delta\psi/\delta r); v_\theta = -(\Delta\psi/\Delta r)$

V primeru nevrtinčnega toka velja: $rot\vec{v} = 0$. Za 2D primer: $(\Delta v/\Delta x) - (\Delta w/\Delta y) = 0 \Rightarrow (\Delta^2\psi/\Delta x^2) + (\Delta^2\psi/\Delta y^2) = 0$ LAPLACEOVA ENAČBA. **Hitrostni potencial ϕ:** definiramo ga tako, da so njegovi odvodi v določeni smeri enaki komponentam hitrosti v tisti smeri: $\vec{v} = grad\ \Phi = \nabla \cdot \Phi$. Kartezične koord: $u = \Delta\Phi/\Delta x$ $v = \Delta\Phi/\Delta y$. Polarne koord: $v_r = \Delta\Phi/\Delta r$ $v_\theta = \Delta\Phi/r \cdot \Delta\theta$. Hitrostni potencial obstaja samo za nevrtinčni tok. **Lastnosti tokovnih mrež:** 1)Krivulje Φ=konst in Ψ=konst so v vsaki točki med seboj pravokotne. Skalar produkt gradientov je nič:

$$grad\Phi grad\psi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

2) Ob dvočrtni krivulji tvorita krivočrtne kvadrate. Dokaz: naravni koord. sist., smer s in u. Cauchy reimanova enačba:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial u} \Rightarrow \frac{\delta\Phi}{\delta s} = \frac{\delta\psi}{\delta u} \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial u} = -\frac{\partial\psi}{\partial s}$$

Običajno izrnačimo enaka prirastka Φ in ψ. $\Rightarrow \delta\Phi = \delta\psi$. 3) Po Cauchy-Reimanovih enačbah je mogoče najti za vsak hitrostni potencial funkcijo toka in obratno. **Metode za določanje tokovnih mrež: Grafična metoda:** s poskušanjem pridemo do konč rešitve, je zamudna če hočemo mrežo določiti dovolj točno. Ne rabimo računalnika ne nobenih eksperimental naprav, samo s svinčnikom konstruiramo mrežo za kakršne koli robne pogoje. Metoda se uporablja predvsem, ko nas zanima približni potek mreže. **Analitična metoda:** standard poteki toka ali teorija kompleksne spremenljiv = konformne preslikave. Za določene (preproste) robne pogoje imamo že zapisani funkciji fi in psi, tako da veljata v katerikoli točki polja. **Numerične metode:** -uporaba računalnika, diskretizacija področja. Metoda končnih razlik (metoda relaksacije) ali metoda robnih elementov. Pri metodi relaksacije na osnovi končnih diferenc konstruiramo mrežo v primerih, ko zaradi prekompliciranih robnih pogojev analitičnih metod ne moremo uporabiti. Metoda robnih elementov je v osnovi posplošitev metode relaksacije. Polje razdelimo na poljubne like (trikotnike, četverokotnike), za katere ni treba, da so med seboj enaki. Zrišemo jih tako, da se stranice likov prilegajo konturam polja in da so na mestih hitrejšega spreminjanja funkc. fi in psi liki manjši. **Eksperimentalne metode:** Viskozna analogija (Φ=p, tlak je analogen hitrostnemu potencialu nevrinčnega toka), Membranska analogija (Φ=z), Električna analogija (Φ=napetost, tok teče v smeri največjega padca napetosti).**Spreminjanje tlaka v smeri pravokotno na tokovnice:** Eulerjeva enačba za smer $\vec{n}$ pravokotno na tokovnice, ki so ukrivljene:

$$\frac{dv_n}{dt} = N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

kjer je N komponenta masnih sil $\vec{n}$. Pospešek pravokotno na tokovnico:

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial v_n}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial v_n}{\partial s}\vec{v}$$

Privzamemo stalni tok. Konvekcijski pospešek dobimo iz podobnosti trikotnikov: $(R/\delta s) = (v_\tau / \delta v_{\vec{n}}) = -(v_\tau/R)$. Znak – je zato, ker je pospešek usmerjen proti centru krivine. Centripetalni pospešek: $(dv_n/dt) = -(v^2/R)$. Eulerjeva enačba torej dobi obliko:

$$-\frac{v^2}{R} = N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

Če je vpliv masnih sil zanemarljivo majhen, vidimo da tlaki naraščajo z oddaljenostjo od centra krivine: $(\partial p/\partial n) = (\rho v^2/R)$. **Sprememba tlaka ko se vrti tudi posoda:** Tok je vrtinčen $\Rightarrow$ Bernoullijeva enačba velja le vzdolž ene tokovnice. Uporabimo spremembo tlaka pravokotno na tokovnico: $\partial p/\partial n = \rho v^2/r \Rightarrow dp/dr = \rho v^2/r = (\omega^2 r^2/r) * \rho$ od tod dobimo enačbo za spremembo tlaka: $p = \rho\omega^2 r^2/2 + c$ …kvadratna parabola. **Brezdimenzijska oblika dinamične enačbe:** osnovna oblika Eulerjeve enačbe:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} gradp + \nu\Delta v + \frac{\nu}{3} grad(div(\vec{v})) \qquad \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

Predpostavimo nestisljivo tekočino, $\vec{F}_m = (0,0,-g)$, tok je stalen, zapišemo le enačbo za smer z in dobimo:

$$w\frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

Uvedemo karakteristične parametre: L … karakteristična dolžina, U … karakt. hitrost in tvorimo brezdimenzijske parametre: $w' = (w/U)$, $z' = (z/L)$, $p' = (p/\rho U^2)$. Ko jih ustavimo v enačbo dobimo:

$$w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\frac{U^2}{L} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\rho U^2}{L} + \nu\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}\frac{U}{L^2}$$

Uvedemo Froudovo in Reynoldsovo št.: $Fr = (U^2/Lg)$ $Re = (UL/\nu)$ Dobimo:

$$w'\frac{\partial w'}{\partial z'} = -\frac{1}{Fr} - \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}$$

Reynoldsovo št.: je pokazatelj laminarnega oz. turbolentnega toka ter kakšna je inteziteta enega ali drugega toka. **Froudovo št.:** uporablja se za preračun iz modela v naravo, če je vpliv težnosti prevladujoč. **Re ŠT. ZA GLADKO IN HRAPAVO KROGLO:** Pri gladki krogli nastane, preko njenega spred dela, do roba odlepljanja laminar mejna plast. Pri hrapavi krogli pa hrapava površ na nosu povzroči turbulent mejno plast, ki se odlepi kasneje kot laminar mejna plast. V turbulent mejni plasti se zaradi turbulence vse količine mešajo v prečni smeri na tok. Tam se vzdolž. gibanje delcev z zunanji plasti bolj prenaša na notranje tik ob steni, tako da tok dlje spremlja stene, preden se odlepi. Ta pojav izkoristimo za zmanjšanje oblikovnega upora. To lahko prakt. izkorist.: pri določ. območju Re, kjer lahko s hrapavostjo povzročimo hitrejši prehod iz laminar v turbulentno mejno plast in s tem kasnješe odlepljanje. Primeri: -rebrasti hladilni stolpi termocentral –golf žogica –tennis žogica… **Laminarni tok**: Tok teče v plasteh, Re<2300 v ceveh, Re<500 v kanalih, izgube ener. so premosorazmer s prvo potenco hitrosti. Lahko nastopa kot tok med dvema ploščama, tok v cevi, tok med koncentričnima ploskvama ali tok med dvema vrtinčnima diskoma. **Turbolentni tok:** izgube ener. so sorazmer. s kvadratom hitr., vztrajnostne sile >> viskozne sile, Re>2300 cev, Re>500 kanal, zelo pogosto nastopa v praksi. **Konvekcijsko difuzijska enač za turbolentni transport snovi:**

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho dz = \iint_S \rho\vec{v}ds$$

$c=(m_{SNOVI}/(m_{SNOVI}+m_{OSTALO}))$ $m_{SNOVI}=c\cdot m_{VODE}$, $m_{SNOVI} << m_{VODE}$

Kontinuitetna enačba za dodatne snovi:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint c\rho dP = \iint_S c\rho\vec{v}ds$$

$$\iiint_P \left(\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + div(c\rho\vec{v})\right)dP = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + div(c\rho\vec{v}) = 0$$

predpostavimo nestis. tek. (ρ=konst):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + div(c\vec{v}) = 0 \qquad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c u_i}{\partial x_i} = 0$$

$c=\bar{c}+c'$ $\bar{c}$=povp. c'=odstop. $u_i=\bar{u}_i+u_i'$ upoštevamo $\bar{c}'=0$ in $\bar{c}'\cdot u_i=0$

Dobimo enačbo za povprečne vrednosti:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_i\frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} + \frac{\partial(\overline{c'u_i'})}{\partial x_i} = 0$$

Zadnji člen predstavlja turbolenten tok snovi, ki ga izrazimo s pomočjo pikovega zakona. J=transport snovi= $\overline{c'u_i'} = -D_{ti}\cdot(\partial\bar{c}/\partial x_i)$ $-D_{ti}$=turbolentni difuzijski koef. za transport snovi. Končna oblika enačbe:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = = \frac{\partial}{\partial x}(D_{tx}\frac{\partial \bar{c}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(D_{ty}\frac{\partial \bar{c}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(D_{tz}\frac{\partial \bar{c}}{\partial z}) + izvor/ponor$$

UPOR: Upor trenja (viskozni): nastane zaradi strižnih napetosti, oz. zaradi viskoznosti in gradientov hitrosti ob površini telesa, ki povzročajo sile, ki so v vsaki točki tangencialne na površino. **Upor oblike:** nastane zaradi norm.nap. (tlakov), ki so zaradi dinamičnih efektov razporejeni neenakomerno vzdolž površine telesa. **Dinamični vzgon:** nastane zaradi norm. tlakov, ko je razpored nesimetričen glede na os v smeri osnovnega toka.

$$F_t = \int_s \tau_p \sin\Phi dS$$

$$F_p = -\int_S p\cos\Phi dS$$

F_t…upor trenja F_p…upor oblike

Praktično računamo silo upora po enačbi:

$F_U=c\cdot(\rho u^2/2)\cdot S$; S…prečni presek, c=koef. (dobljen eksperimentalno – funk.Reynolds. št.)

DARCY-jev ZAKON: Voda teče v smeri največjega padca piezometrične višine, hitrost pa je enaka: $\bullet v = -K*grad\pi$; $\pi=z+p/(\rho g)$ je peizometrična višina, K pa koef. prepustnosti zemljine. Znak minus, ker je hitrost usmerjena v smeri padca črte. •v nidejanska, ampak namišljena hitrost. **Darci-jev poskus:** Skozi cev teče pretok Q. na razdalji Δs izmerimo padec piezometrične višine Δπ. Izkaže se, da Δπ linearno narašča, zato sledi: $v= Q/S= -K*\Delta\pi/\Delta S$, kjer je K…koef. prepustnosti. To je osn. Darcyjev zakon za tok v eni dimenziji. ⇒ 1D za splošni tok moramo nadomestiti Δπ/ΔS z gradπ ⇒ 3D pa $v= -K*grad\pi$ **Tok podtalnice je potencialen:** Ker je K za določen material konst., ga lahko prenesemo pod znak gradienta: $\bullet v= grad(-K\pi)$ zaradi česar je tok potencialen. **Postopek za določitev vertikalne sile na dno pregrade:** 1)po eni od metod določimo tokovno mrežo za tok pod pregrado. 2)Padec piezometrične višine Δπ med dvema zapored. ekvi. črtama je $\Delta\pi= (H_1-H_2)/n$ Konstruiramo potek piezometrične črte med točkama 0 in n. 3)Tlačno višino na vsakem mestu dnadobimo po enačbi: $p_A/(\rho g)= \pi_A -Z_A$ 4)Vzamemo 2D problem in dobimo vertikalno komp. sile pritiska na dno pregrade, tako da integriramo ploskev med dnom in tlačno črto: $F_V=\rho g\int(p/\rho g)dS$ 5)Predtok na pregrado. Iz Darcyjeve enačbe dobimo: $\Delta q=K*H/n$ Nato Δq pomnožimo z številom vseh pasov med tokovnicami in dobimo pretok: $Q= \Delta q*m= K*H*m/n$ **DEFINICIJA ROTOTORJA VEKTORSKEGA POLJA:** $|rot\bullet v|_n= lim_{S\to 0}$ $\phi_e*\bullet v*d\bullet r/S= lim_{S\to 0}\ \Gamma/S$ **Rotor v cilindričnih koordinatah:** 1)Smer •r: $(rot\bullet v)_r = lim_{dSr\to 0}$ $\phi*\bullet v*d\bullet r/dS_r = 1/(rd\varphi z)*[rd\varphi v_\varphi + [v_z + (\partial v_z/\partial\varphi)\ d\varphi]dz - [v_p + (\partial v_p/\partial z)\ dz]rd\varphi - v_z d_z]= 1/(rd\varphi dz)*[(\partial v_z/\partial\varphi)d\varphi dz - (\partial v_p/\partial z)\ rdzd\varphi] =(1/r)(\partial v_z/\partial\varphi) - (\partial v_p/\partial z)$ 2)Smer φ: $(rot\bullet v)_\varphi =lim_{dS_{r\to 0}}(\phi_{cr}\bullet vdr)/dSp = 1/(drdz)*[v_z dz + [v_r + (\partial v_r/\partial z)dz]dr - [v_z + (\partial v_z/\partial r)dr]dz - v_r dr]= 1/(drdz)*[(\partial v_r/\partial z)drdz - (\partial v_z/\partial r)drdz]= \partial v_r/\partial z - \partial v_z/\partial r$ 3)Smer z: $(rot\bullet v)_z = lim_{dSz\to o}\ \phi\bullet vdr/dS_z = 1/(rd\varphi dz)\ [v_r dr + [v_p + (\partial v_\varphi/\partial r)dr](r+dr)d\varphi - [v_r + (\partial v_r/\partial\varphi)d\varphi]dr - v_\varphi rdr]= 1/(rdrd\varphi)\ [v_p drdp + (\partial v_\varphi/\partial r)rdrd\varphi + (\partial v_\varphi/\partial r)drdrd\varphi - (\partial v_r/\partial\varphi)drd\varphi]= (1/r)\ v_\varphi + \partial v_\varphi/\partial r - (1/r)\ \partial v_r/\partial\varphi= (1/r)[\partial(rv_\varphi)/\partial r - \partial v_r/\partial\varphi]$ **Primeri vrtinčnega in nevrtinčnega toka:** 1)Tekočina se vrti skupaj s posodo: tok je vrtinčen –cilindričen koordinatni sistem. $v_r=0$, $v_\varphi=\omega r$, $v_z=0 \Rightarrow (rot\bullet v)_r =0$, $(rot\bullet v)_\varphi =0$, $(rot\bullet v)_z = 2\omega$ 2)Tok v kanalu: tok je vrtinčen. Hitrost toka ob steni je nič, nato pa narašča z oddaljenostjo od stene preko mejne plasti in doseže vrednost •v. Pokažemo lahko, da je cirkualcija različna od o, s tem pa tudi $rot\bullet v\neq 0$. 3)Potencialni vrtinec: Posoda v katero doteka tekočina ima v centru iztok. Hitrost je v tem primeru obratno sorazmerna z radijem: v=konst/r. Merilec vrtinčnosti se premika samo translatorno po krivulji, vendar se ne vrti okrog svoje osi⇒ $\Gamma=0 \Rightarrow rot\bullet v=0$.