

MATEMATIČNO MODELIRANJE OKOLJSKIH PROCESOV

POROČILO VAJE

VAJA 1: VERTIKALNI RAZPORED KONCENTRACIJ

8.6.2015

1 NAMEN VAJE

Voda z lebdečimi plavinami teče preko akumulacije približno pravokotnega peska.

Podatki:

$d_s = 0.0089$ cm premer zrna,
 $h = 19$ m globina akumulacije,
 $b = 109$ m širina akumulacije,
 $Q = 200$ m³/s pretok skozi akumulacijo,
 $I = 0.003$ padec dna akumulacije,
 $a = 0.5$ m referenčna višina nad dnom,
 $\rho_s = 1509$ kg/m³ specifična gostota plavin.

Naloge:

- Razpored koncentracije po višini $c(z)$ ob upoštevanju enakomernega razporeda intenzitete turbulence po globini.
- Razpored koncentracije po višini $c(z)$ ob upoštevanju neenakomernega razporeda intenzitete turbulence po globini. Upoštevajte logaritemski zakon razporeditve hitrosti po višini in linearni potek strižnih napetosti po globini.

2 TEORETIČNI UVOD

V turbulentnem toku lahko nastanejo pogoji, da se lebdeče plavine ne posedejo. Takšno stanje lahko obravnavamo, kakor procese advekcije in difuzije.

2.1 LEBDEČE PLAVINE V LAMINARNEM TOKU

Teoretično izpeljavo pričnemo z zakonom o ohranitvi mase

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\nabla(c u) + \varepsilon_m \nabla^2 c \quad (1)$$

kjer so:

- c koncentracija plavin,
- u hitrost toka,
- ε_m koeficient molekularne difuzije.

Prvi člen na desni predstavlja vpliv gibanja tekočine in drugi člen vpliv difuzije na koncentracijo plavin. Predpostavimo, da so zrna plavin tako majhna, da suspenzijo obravnavamo kot raztopino. Enačba (1) velja za splošno za stisljive tekočine, za nestisljive tekočine pa lahko to enačbo poenostavimo:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \nabla c + \varepsilon_m \nabla^2 c \quad (2)$$

V treh dimenzijah pa zapišemo gornjo enačbo še v tenzorski obliki:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u_i \frac{\partial c}{\partial x_i} + \varepsilon_m \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3)$$

2.2 LEBDEČE PLAVINE V TURBULENTNEM TOKU

V nadaljevanju bomo obravnavali plavine v turbulentnem toku. Koeficient turbulentne difuzije je definirala Elder (1959) kot:

$$\varepsilon_{t,i,j} \frac{\partial c}{\partial x_i} = -\overline{c' u_i'} \quad (4)$$

Kjer je

u' odstopanje od povprečne vrednosti

V turbulentnem toku ne moremo izmeriti hitrosti in koncentracij v vsakem trenutku, temveč le povprečno vrednost in amplitudo odstopanja od le tega:

$$u(t) = \bar{u} + u'(t)$$

$$c(t) = \bar{c} + c'(t)$$

To nesemo v enačbo (3)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\bar{u}_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{c' u_i'}) + \varepsilon_m \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x_i \partial x_j}$$

Pod predpostavko, da sta molekularna in turbulentna difuzija neodvisni in s tem aditivni lahko zapišemo:

$$\varepsilon_{ij}(x_i) = \varepsilon_{t,i,j} + \varepsilon_m \quad \varepsilon_{t,i,j} \ll \varepsilon_m$$

Koeficient molekularne difuzije pogosto zapišemo tudi kot $\varepsilon_m = D_z$ vertikalna komponenta koeficienta difuzije. Ta člen bomo zanemarili, saj je nekaj redov manjši od koeficienta turbulentne difuzije.

Koeficient turbulentne difuzije izračunamo z integracijo spodnjega izraza:

$$\varepsilon_{zs} = \int_0^h \frac{\mathcal{K}}{6} u_* dz = \frac{\mathcal{K}}{6} u_* h = 0.5383 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial y} - w \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (5)$$

2.3 VERTIKALNA RAZPOREDITEV KONCENTRACIJE LEBDEČIH PLAVIN PRI ENAKOMERNI RAZPREDITVI TURBULENCE IN STALNIH POGOJIH

Za nadaljnje postopka iz enačbe (5) moramo uvesti naslednje predpostavke:

1. Intenziteta turbulence je po globini enakomerno razporejena in koeficient difuzije je neodvisen od globine.
2. Koncentracija se ne spreminja s časom $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$
3. Koncentracija plavin se v horizontalnih smereh x in y ne spreminja

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial y} = 0$$

Dobimo naslednjo poenostavljeno enačbo:

$$0 = -w \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (6)$$

Os z je usmerjena navpično navzgor zato definiramo navpično hitrost plavin $w_s = -w$ in sledi:

$$0 = -w \frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$

$$\varepsilon_{s,z} \frac{\partial c}{c} = -w_s dz \quad (7)$$

Enačbo (7) integriramo po globini v mejah od referenčne globine a do z in dobimo:

$$\ln(c) - \ln(c_a) = -\frac{w_s}{\varepsilon_{s,z}} (z - a)$$

$$c = c_a e^{-\frac{w_s}{\varepsilon_{s,z}}(z-a)} \quad (8)$$

Po slednji enačbi ob poznavanju vseh parametrov lahko izračunamo potek koncentracij plavin po globini.

2.4 NEENAKOMERNA INTENZITETA TURBULENCE PRI NESTALNIH POGOJIH

Podobno kot v poglavju 2.3 bomo tudi v tem poglavju pri izpeljavi upoštevali določene predpostavke:

1. Intenziteta turbulence se po globini spreminja
2. Koncentracija se ne spreminja s časom $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$
3. Koncentracija plavin se v horizontalnih smereh x in y ne spreminja

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial y} = 0$$

Te predpostavke nas zopet privedejo do enačbe (7) vendar pa sedaj ne moremo enačbe kar integrirati, zaradi odvisnosti koeficienta difuzije od z. To odpravimo z uvedbo O'Brienove porazdelitve strižnih napetosti po globini:

$$\tau_z = \tau_0 \frac{h - z}{z} \quad (9)$$

Hitrost se po globini spreminja po naslednji zvezi:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sqrt{\tau_0}}{\mathcal{K}z} = \frac{u_*}{\mathcal{K}z} \quad (10)$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{gRI} = \sqrt{\frac{gS}{o}I}$$

kjer sta:

$\mathcal{K} = 0.41$ von Karmanova konstanta

u_* strižna hitrost

Strižno napetost odvisno od globine lahko izrazimo še na drug način

$$\tau_z = \rho \varepsilon_{s,z} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (11)$$

Iz enačb (9), (10) in (11) dobimo izraz za koeficient difuzije plavin odvisen od globine:

$$\varepsilon_{s,z}(z) = \mathcal{K}u_* \frac{z}{h} (h - z) \quad (12)$$

Ta izraz nesemo v enačbo (7), ki jo integriramo po globini v mejah od a do z.

$$\int_{c_a}^c dc/c = -R_0 \int_a^z \frac{h}{z} \frac{dz}{h - z}$$

$$\frac{c}{c_a} = \left(\frac{h - z}{z} \frac{a}{h - a} \right)^{R_0} \quad (13)$$

kjer je $R_0 = w_s / \mathcal{K}u_*$. Po enačbi (13) lahko ob poznavanju vseh parametrov izračunamo razpored koncentracije pri neenakomerni razporeditvi turbulence po globini.

2.5 HITROST USE DANJA DELCEV

Na delec plavine v toku v vodi delujejo gravitacijska sila, sila vzgona ter sila upora. Iz seštevanja teh sil lahko izrazimo hitrost usedanja delca

$$w_s = \sqrt{\frac{4}{3c_D} d_s \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g} \quad (14)$$

kjer so:

c_D koeficient upora zaradi oblike,

d_s premer delcev,

ρ_s gostota delcev,

ρ gostota vode.

Koeficient upora zaradi oblike moramo določiti za vsako vrsto toka posebej. Vrsto toka opredelimo z Reynoldsovim številom, ki ga v tem primeru definiramo kot $Re_s = w_s d_s / \nu$, kjer je $\nu = 1.31 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Laminarni tok	$Re_s < 0.2$	$c_D = 24/Re_s$
Prehodno območje	$0.2 < Re_s < 750$	$c_D = 24/(Re_s) + 3/\sqrt{Re_s} + 0.34$
Turbulentni tok	$Re_s > 750$	$c_D = 0.445$

Pred vsemi izračuni moramo preveriti ali sploh imamo pogoje, kjer hitrost toka vode manjša od hitrosti pri kateri se že usedeni delci resuspendirajo. To ugotovimo z izračunom te hitrosti po enačbi

$$u_{min,res} = \sqrt{\frac{8\beta g d_s (\rho_s - \rho)}{\rho \lambda}} \quad (15)$$

kjer sta koeficienta $\beta = 0.1$ in $\lambda = 0.007$.

3 POSTOPEK REŠEVANJA

Nalogo rešujemo v naslednjih korakih:

1. Izračun hitrosti usedanja
To storimo tako, da predpostavimo vrsto toka, določimo koeficient upora, izračunamo hitrost usedanja in z izračunom Reynoldsovega števila preverimo ujemanje s predpostavljeno vrsto toka.
2. Hidravlični pogoji v akumulaciji
 - a. Iz pretoka in dimenzij akumulacije izračunamo hitrost toka $u = \frac{Q}{bh}$.
 - b. Hitrost toka primerjamo z minimalno hitrostjo potrebno za resuspenzijo $u_{min,res}$.
3. Izračun strižne hitrosti u_* iz danih podatkov o akumulaciji
4. Izračun poteka koncentracij plavin po globini
 - a. Enakomerna porazdelitev turbulence: enačba (8)
 - b. Neenakomerna porazdelitev turbulence: enačba (13)

4 REZULTATI

4.1 HITROST USE DANJA

Predpostavil sem, da je tok v akumulaciji laminaren, zato sem hitrost usedanja izračunal po formuli

$$w_s = \frac{gd_s^2}{18\nu} \frac{\rho_s - \rho}{\rho}$$

Dobil sem rezultat $w_s = 0.001677347$ m/s, kar sem ustavil v enačbo za Reynoldsovo število in dobil $Re = 0.113957185$. Ker je $Re < 0.2$, je izpolnjen pogoj za laminarni tok in s tem je moja predpostavka potrjena.

4.2 HIDRAVLIČNI POGOJI V AKUMULACIJI

Hitrost toka v akumulaciji je $u = \frac{Q}{bh} = 0.1$ m/s.

Hitrost toka v akumulaciji je manjši od minimalne hitrosti, pri kateri se delci resuspendirajo $u_{res\ min} = 0.22536$ m/s.

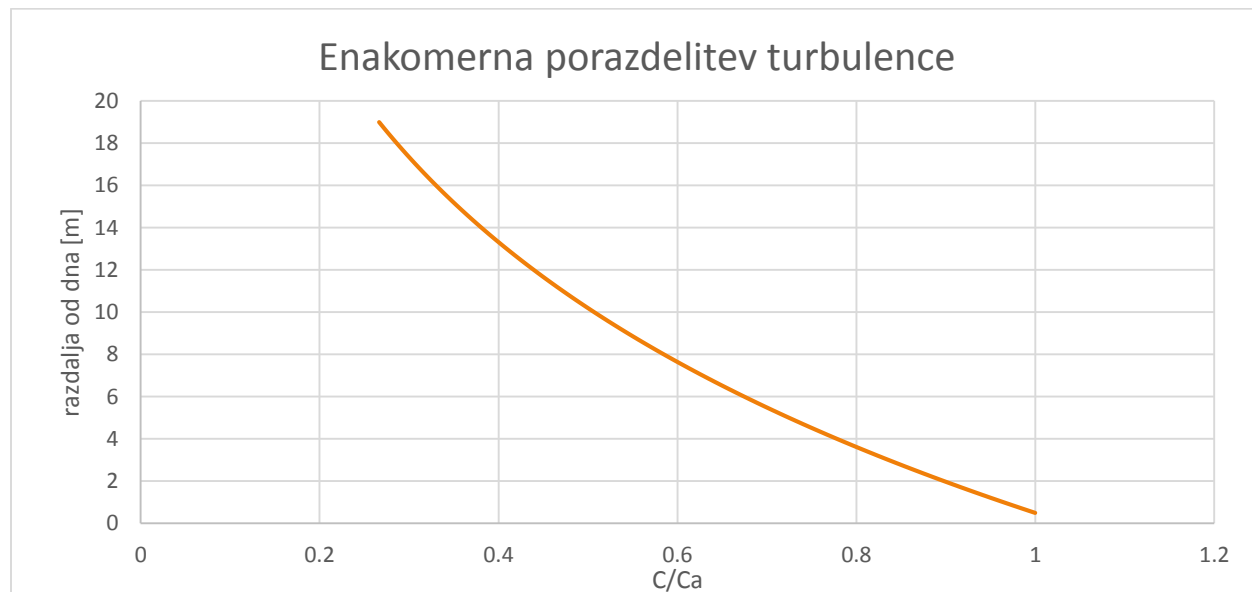
4.3 STRIŽNA HITROST

Strižna hitrost je $u_* = 0.4146$ m/s.

4.4 ENAKOMERNA RAZPOREDITEV TURBULENCE

Pri enakomerni razporeditvi turbulence uporabimo povprečno vrednost koeficienta difuzije

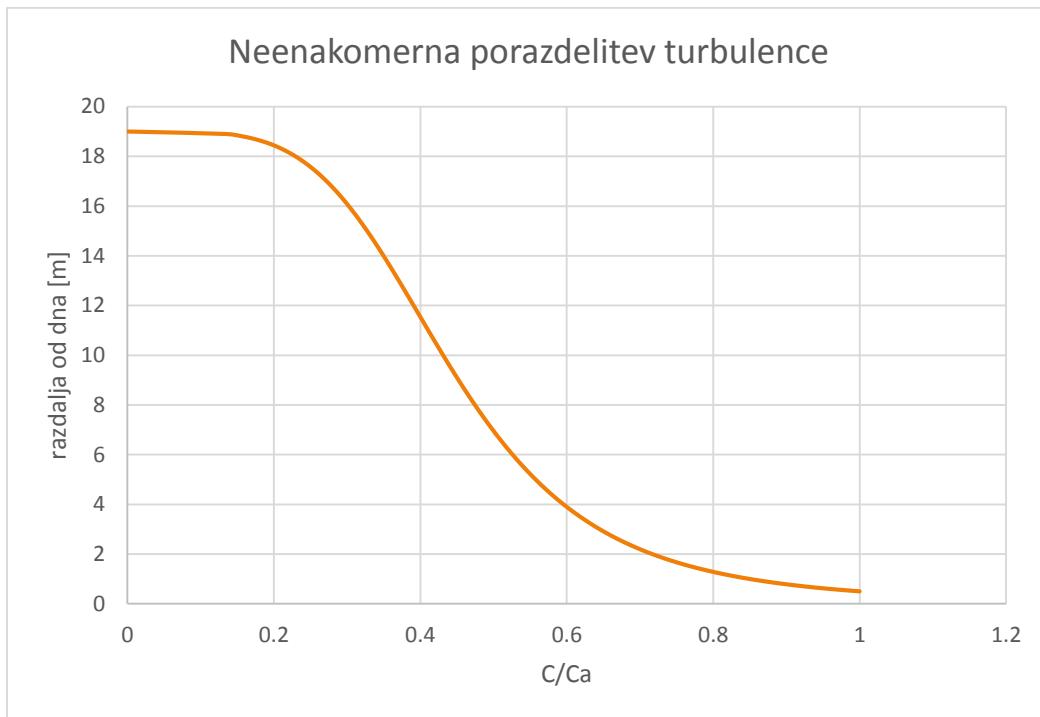
$\varepsilon_{z\ s} = 0.5383 \frac{m^2}{s}$. Vstavil sem ga v enačbo (8) in izračunal razmerje c/c_a od gladine do referenčne globine a od dna akumulacije. To sem grafično prikazal na Graf 1.



Graf 1 Potek koncentracije po globini pri enakomerni razporeditvi turbulence in pri stalnih pogojih.

4.5 NEENAKOMERNA RAZPOREDITEV TURBULENCE

Pri neenakomerni razporeditvi turbulence sem računal po enačbi (13). Tako kot pri enakomerni razporeditvi sem izrisal potek koncentracije c/c_a po globini (Graf 2).



Graf 2 Potek koncentracije po globini pri neenakomerni razporeditvi turbulence