OSNOVNI NEWTONOV ZAKON ZA TEKOČINE (COUETTOV POSKUS):

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{du}{dy} = \tau$$

EULERJEVE IN LAGRANGEOVE KOORDINATE: Lagrangeov način: Imamo nek materialni delček, ki ga opazujemo kako potuje po prostoru. Radij vektor se spreminja po neki krivulji. $\rho=f(x_0,y_0,z_0,t)$, $\vec{v}=\vec{v}(x_0,y_0,z_0,t)$. **Eulerjev način**: Obravnavamo delček prostora v katerega snovi prihajajo in odhajajo. Vse količine se spreminjajo s koordinatami in s časom. $\vec{v}(u,v,w)=f(x,y,z,t)$ $\rho=f(x,y,z,t)$.

KONTINUITETNA ENAČBA:
Predpostavimo, da veljata zakon o ohranitvi mase in mehanika kontinuiuma (masa enakomerno razporejena po prostoru). Potemtakem je časovna sprememba mase v volumnu (P) enaka neto masnemu pretoku skozi površino (S).

$$\iint_S \rho \vec{v} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_P \rho dP$$

Če za levi del uporabimo Gaussov teorem za pretvorbo ploskovnega int. v prostorskega dobimo:

$$\iiint_P div(\rho \vec{v}) dP + \iiint_P \frac{\partial \rho}{\partial t} dP = 0$$

Če integrala združimo dobimo:

$$\iiint_P \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) \right) dP = 0$$

⇒KONT. EN.:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Poenostavitve: Stalni tok ($\delta/\delta t=0$) → $div(\rho \vec{v})=0$. Stalni tok + nestis. tek. (ρ=konst.) → $\delta u/\delta x+\delta v/\delta y+\delta w/\delta z=0$

DINAMIČNA ENAČBA:
Zveza med napetostmi in deformacijsko hitrostjo za tekočine: →Posplošeni Newtonov zakon oz. Stokesov zakon. Tenzorski zapis zakona:
$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}+2\mu(f_{ij}- 1/3\, div\, \vec{v}\, \delta_{ij})$

$$f_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Izpeljava dinamične enačbe:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma \vec{F}$$

$$\iiint_P \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dP = \iiint_P \vec{F}_m \rho dP + \iint_S [\sigma] d\vec{S}$$

Zadnji člen pretvorimo po Gaussovem izreku, ki velja tudi za pretvorbo tenzorske količine napetosti $[\sigma]$:

$$\iiint_P \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dP = \iiint_P \vec{F}_m \rho dP + \iiint_P div[\sigma] dP$$

Če to upoštevamo in združimo vse volumske integrale, dobimo:

$$\iiint_P \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{F}_m - div[\sigma] \right) dP = 0$$

Izraz pod integralom mora biti enak 0. Enačbo še malo preuredimo in dobimo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_m + \frac{1}{\rho} div[\sigma]$$

Če upoštevamo, da je:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(f_{ij} - \frac{1}{3} div\vec{v}\delta_{ij})$$

in da je $\nu = \mu / \rho$, dobimo Navier – Stokesovo t.i. dinamično enačbo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} gradp + \nu \Delta v + \frac{\nu}{3} grad(div(\vec{v}))$$

Prvi člen predstavlja lokalni in konvekcijski pospešek, drugi člen vpliv masnih sil, tretji vpliv tlačnih sil, četrti vpliv viskoznih sil, zadnji pa vpliv stisljivosti. Pri nestisljivih tekočinah odpade zadnji člen, za idealno tekočino pa odpadeta zadnja člena, tako da dobimo t.i. Eulerjevo Enačbo = dinamična enačba za idealno tekočino:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho} gradp$$

ENAČBA STANJA:
$f(\rho,p,T)=0$, $p=f(\rho,T)$, $\rho=f(p,T)$

ENERGIJSKA ENAČBA:
Sprememba energije dE/dt je enaka spremembi zaradi neto pretoka energije skozi kontrolni volumen in časovni spremembi energije znotraj k.v..

$$\frac{dE}{dt} = \iint_S e\rho(\vec{v} d\vec{S}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_P e\rho dP$$

Splošna energijska enačba:

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dA_m}{dt}-\frac{dA_t}{dt}=\iint\left(\frac{p}{\rho}+e\right)\rho(\vec{v}d\vec{S})+\frac{\partial}{\partial t}\iiint_p e\rho dP$$

Če poenostavimo problem v stalni tok, dobimo:

$$\frac{dQ}{dt}-\frac{dA_m}{dt}=\iint_S(e_i+\frac{p}{\rho}+gh+\frac{v^2}{2})\rho\vec{v}d\vec{S}$$

Enačbo integriramo med vstopnim (1) in izstopnim presekom (2):

$$\frac{p_1}{\rho g}+h_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\rho g}+h_2+\frac{v_2^2}{2g}+\frac{dA_m}{dt}-\frac{dQ}{dt}-\frac{e_{i2}-e_{i1}}{g}$$

HIDROSTATIKA:

Statika stisljivih tekočin: V dinamični enačbi so vsi členi, ki vsebujejo odvode hitrosti enaki 0: $F^{\sim}-1/\rho(\text{grad } p)=0$. Edina masna sila, ki deluje na delec tekočine je njegova težnost: $Z=-g$ $F_m^{\sim}(X,Y,Z)=(0,0,-g)$. Za reševanje uporabljamo še tretjo enačbo: $p/\rho=RT$. Če je $T=konst \Rightarrow p/\rho=konst.$. Stisljivost in modul stisljivosti: Izhajamo iz pogoja konstantne mase: $m=\rho\cdot p=konst$. Zato je $\rho dP=-Pd\rho$. Ker je v splošnem gostota funkc. tlaka je tudi: $-(d\rho/\rho)=dP/P=-\chi dp$. χ imenujemo stisljivost:

$$\chi=\frac{d\rho/\rho}{dp}=-\frac{dP/P}{dp}$$

Večkrat uporabljamo modul stisljivosti $K=1/\chi$. Za pline lahko dobimo odvisnost modula stisljivosti od tlaka na sledeči način: Uporabimo enač. stan. za idealne pline: $p/\rho=RT=konstanta$. Z odvajanjem enačbe dobimo izraz za modul stisljivosti $d(p/\rho)=0$, in ker $\rho\neq0$ dobimo: $P=dp/(d\rho/\rho)=K$. Torej je modul stisljivosti enak absolutnemu tlaku p. Za kapljevine lahko navadno privzamemo, da je K=konst. in gostoto zapišemo kot:

$$\rho=\rho_0 e^{\frac{p-p_0}{K}}$$

Statika nestisljive tekočine: ρ=konst, p=p(z). Osnovna enačba hidrostatike: $p_{ABS}=p_0+\rho gh_A$ določa zvezo med p in h.

Sila hidrostatičnega tlaka in njeno prijemališče: SILA: $dF=pdS=\rho g(z_0-z)dS$ Delamo v rel. sist., torej je $p_0=0$. $F=\rho g\cdot\int_S(z_0-z)dS$. Izraz pod integralom je statični moment ploskve S glede na ravnino gladine G: $M_{SG}=\int_S(z_0-z)dS=S(z_0-z_T)$. Tako dobimo izraz za silo: $F=\rho gh_TS$, kjer je S v splošni ravnini, h_T pa v vertikalni ravnini. Enačba splošno velja, ne glede na to, kakšen je kot nagiba α. PRIJEMALIŠČE: $M_{FG}=F(z_0'-z_S')=\int_S(z_0'-z')dF$. $\int_S(z_0'-z')\rho g(z_0-z)dS=\rho gh_TS\cdot h_S'$. $\rho g\cdot\sin\alpha\cdot\int_S(z_0'-z')^2dS=\rho gh_TS\cdot h_S'$ I_G=vztraj. mom. ploskve= $\int_S(z_0'-z')^2dS=I_T+S\cdot(z_0'-z_T')^2$ $I_T+h_T'S=h_T'Sh_S'$;če delimo z $h_T'S$, dobimo:

$$h_S'=h_T'+\frac{I_T}{h_T'S}$$

=Izraz za prijemališče sile. SILA HS TLAKA IN PRIJEMALIŠČE NA KRIVO PLOSKEV: $dF^{\sim}=pdS^{\sim}\Rightarrow dF_x=\rho ghdS_{yz}\Rightarrow\int_S dF_x=F_x=\rho g\int hdS_{yz}\Rightarrow F_x=\rho g\, h_{T\,Syz}\, S_{yz}$ $F_y=\rho gh_{TSxz}S_{xz}$ $F_z=\rho gP_v$

Stabilnost plavanja: Za popolnoma potopljena telesa je plavanje stabilno, če $y_{CG}<y_{CW}$. Za plavajoča telesa je plavanje stabilno, če je razdalja $MC_G>0$, oz. če je razdalja $C_wM = I/P>$ razdalje C_WC_G. IZPELJAVA METACENTRIČNE RAZDALJE $\partial M=\partial F\cdot x=(\rho gx\cdot tg\theta\cdot dS)\cdot x$ mali koti nagiba $\Rightarrow tg\theta\approx\sin\theta\approx\theta$. $M=\int_S\partial M=\rho g\theta\int_S x^2\partial S=\rho g\theta\cdot I$. I je vztrajnostni moment ploskve. $M=W\cdot r=\rho gPr=\rho g\theta I\Rightarrow r=\theta\cdot(I/P)$. r=razdalja $C_wM\times\sin\theta\approx$ razdalja $MC_w\times\theta$. razdalja $MC_w\cdot\theta=\theta\cdot(I/P)$ razdalja $MC_w=(I/P)$ razdalje $(MC_G=MC_w\pm C_wC_G)$ Določanje kota nagiba: $F\cdot d=G\times MC_G\cdot\sin\theta$.

KINEMATIKA:

Tokovnice (streamlines) so črte, ki v vseh točkah prostora spajajo smeri hitrosti. Torej so hitrosti v vseh točkah tangencialne na tokovnice. Trajektorije (pathlines) so črte po katerih se gibljejo posamzni delci tekočine. Sledi (streaklines) so črte, ki v istem trenutku spajajo vse tekočinske delce, ki so v teku opazovanega časa šli skozi isto točko. **Lastnosti tokovnic:** Pravokotno na tokovnice ni pretoka. Med dvema tokovnicama teče vedno enak pretok. Med seboj se ne sekajo, razen v singularnih točkah. Trdni obrisi objektov so tokovnice, razen v primeru odlepljanja tokovnic.

Primere nestalnega toka lahko ob primerni izbiri koord. sist. pretvorimo v primere stalnega toka.
Kelvinov teorem: Izhajal je iz osnovne dinamične enačbe za nestisljive tekočine:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} gradp + \nu\Delta\vec{v}$$

Vse člene je integriral po zaključeni krivulji:

$$\oint \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \oint \vec{F} d\vec{r} - \oint \frac{1}{\rho} grad\ \ p\ d\vec{r} + \oint \nu\Delta\vec{v}$$

Dokažemo lahko, da je prvi člen na levi strani enačbe enak časovnemu odvodu cirkulacije Γ:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \frac{d(\vec{v}d\vec{r})}{dt} = \oint \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} + \oint \vec{v} d\vec{v}$$

Zadnji člen je zaradi krožne integracije enak 0. Če je polje tlakov stacionarno, ni pa funkc. časa, lahko drugi člen na desni strani enačbe spremenimo v:

$$\oint \frac{1}{\rho} gradpd\vec{r} = \oint \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = \oint \frac{dp}{\rho}$$

in dobimo t.i. Kelvinovo enačbo:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint \vec{F} d\vec{r} - \oint \frac{dp}{\rho} + \oint \nu\Delta\vec{v} d\vec{r}$$

Prvi člen je moment masnih sil (teža, coriolisova), drugi moment tlačnih sil, tretji pa moment viskoznih sil. Če imamo barotropno stanje, od masnih sil deluje le teža, vpliv viskoznih sil pa je zanemarljiv, potem se nevrtinčni tok ne more spremeniti v vrtinčnega. **Helmoholtovi zakoni:** 1) Vrtinčnice se nikjer v tekočini ne končajo. Tvorijo bodisi zaključene krivulje, bodisi se končajo na robovih tekočinskega polja. 2) Tekočinska linija, ki je istočasno vrtinčnica, ostane vedno vrtinčnica. Razmerje (rot $\vec{v}/\rho \cdot l$) je konstantno na določeni vrtinčnici.
Funkcija toka ψ: je funkcija določena le do neke poljubne konstante. Obstaja tako za vrtinčni kot za nevrtinčni tok. Definicija:

$\psi_P - \psi_A = u \cdot \delta y \cdot 1 = \delta\psi = u\delta y \Rightarrow u = (\delta\psi/\delta y)$, limita, ko gre δy proti 0, $u = (\partial\psi/\partial y)$
$\psi_P - \psi_A = -v \cdot \delta x \cdot 1 = \delta\psi = -v\delta x \Rightarrow v = -(\delta\psi/\delta x)$, limita, ko gre δx proti 0, $v = -(\partial\psi/\partial x)$

$\psi_P - \psi_A = \delta\psi = v_r \cdot r \cdot \delta\theta \Rightarrow v_r = (\delta\psi/r \cdot \delta\theta); v_r = (\Delta\psi/r \cdot \Delta\theta)$
$\psi_P - \psi_A = \delta\psi = v_\varphi \cdot \delta r \Rightarrow v_\varphi = -(\delta\psi/\delta r); v_\varphi = -(\Delta\psi/\Delta r)$
V primeru nevrtinčnega toka velja: $rot\vec{v} = 0$. Za 2D primer: $(\Delta v/\Delta x) - (\Delta w/\Delta y) = 0 \Rightarrow (\Delta^2\psi/\Delta x^2) + (\Delta^2\psi/\Delta y^2) = 0$=LAPLACEOVA ENAČBA.
Hitrostni potencial ϕ: definiramo ga tako, da so njegovi odvodi v določeni smeri enaki komponentam hitrosti v tisti smeri: $\vec{v} = grad\ \Phi = \nabla \cdot \Phi$. Kartezične koord: $u = \Delta\Phi/\Delta x$ $v = \Delta\Phi/\Delta y$. Polarne koord: $v_r = \Delta\Phi/\Delta r$ $v_\varphi = \Delta\Phi/r \cdot \Delta\theta$. Hitrostni potencial obstaja samo za nevrtinčni tok. **Lastnosti tokovnih mrež:** 1)Krivulje Φ=konst in Ψ=konst so v vsaki točki med seboj pravokotnice. Dokaz: skalarni produkt gradientov je nič:

$$grad\Phi grad\psi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

2) Ob dvočrtni krivulji tvorita krivočrtne kvadrate. Dokaz: naravni koord. sist., smer s in u. Cauchy reimanova enačba:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial u} \Rightarrow \frac{\delta\Phi}{\delta s} = \frac{\delta\psi}{\delta u} \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial u} = -\frac{\partial\psi}{\partial s}$$

Običajno izrnačimo enaka prirastka Φ in ψ. $\Rightarrow \delta\Phi = \delta\psi$. 3) Po Cauchy-Reimanovih enačbah je mogoče najti za vsak hitrostni potencial funkcijo toka in obratno. **Metode za določanje tokovnih mrež:** <u>Grafična metoda:</u> s poskušanjem pridemo do končne rešitve, je zamudna če hočemo mrežo določiti dovolj točno. Ne potrebujemo ne računalnika ne nobenih eksperimentalnih naprav, lahko samo s svinčnikom in radirko konstruiramo mrežo za kakršne koli robne pogoje. Metoda se uporablja predvsem, ko nas zanima približni potek mreže. <u>Analitična metoda:</u> standardni poteki toka ali teorija kompleksne spremenljivke = konformne preslikave. Za določene (preproste) robne pogoje imamo že zapisani funkciji fi in psi, tako da veljata v katerikoli točki polja. <u>Numerične metode:</u> -uporaba računalnika, diskretizacija področja. Metoda končnih razlik (metoda relaksacije) ali metoda robnih elementov. Pri metodi relaksacije na osnovi končnih diferenc konstruiramo mrežo v primerih, ko zaradi prekompliciranih robnih pogojev analitičnih metod ne moremo

uporabiti. Metoda robnih elementov je v osnovi posplošitev metode relaksacije. Polje razdelimo na poljubne like (trikotnike, četverokotnike), za katere ni treba, da so med seboj enaki. Zrišemo jih tako, da se stranice likov prilegajo konturam polja in da so na mestih hitrejšega spreminjanja funkc. fi in psi liki manjši. Eksperimentalne metode : Viskozna analogija (Φ=p, tlak je analogen hitrostnemu potencialu nevrinčnega toka), Membranska analogija (Φ=z), Električna analogija (Φ=napetost, tok teče v smeri največjega padca napetosti).

Spreminjanje tlaka v smeri pravokotno na tokovnice: Eulerjeva enačba za smer n- pravokotno na tokovnice, ki so ukrivljene:

$$\frac{dv_n}{dt} = N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

kjer je N komponenta masnih sil n_-.
Pospešek pravokotno na tokovnico:

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial v_n}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{\partial v_n}{\partial s}\vec{v}$$

Privzamemo stalni tok. Konvekcijski pospešek dobimo iz podobnosti trikotnikov: $(R/\delta s)=(v_-/\delta v_{-n})=-(v_-/R)$. Znak – je zato, ker je pospešek usmerjen proti centru krivine. Centripetalni pospešek: $(dv_n/dt) = -(v^2/R)$. Eulerjeva enačba torej dobi obliko:

$$-\frac{v^2}{R} = N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

Če je vpliv masnih sil zanemarljivo majhen, vidimo da tlaki naraščajo z oddaljenostjo od centra krivine: $(\partial p/\partial n)=(\rho v^2/R)$.

Brezdimenzijska oblika dinamične enačbe: osnovna oblika Eulerjeve enačbe:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F}_m - \frac{1}{\rho}gradp + \nu\Delta v + \frac{\nu}{3}grad(div(\vec{v}))$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

Predpostavimo nestisljivo tekočino, $F_{-m}=(0,0,-g)$, tok je stalen, zapišemo le enačbo za smer z in dobimo:

$$w\frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

Uvedemo karakteristične parametre: L … karakteristična dolžina, U … karakt. hitrost in tvorimo brezdimenzijske parametre: $w'=(w/U)$, $z'=(z/L)$, $p'=(p/\rho U^2)$. Ko jih ustavimo v enačbo dobimo:

$$w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\frac{U^2}{L} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\rho U^2}{L} + \nu\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}\frac{U}{L^2}$$

Uvedemo Froudovo in Reynoldsovo št.: $Fr=(U^2/Lg)$ $Re=(UL/\nu)$ Dobimo:

$$w'\frac{\partial w'}{\partial z'} = -\frac{1}{Fr} - \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2}$$

Reynoldsovo št.: je pokazatelj laminarnega oz. turbolentnega toka ter kakšna je intezitetа enega ali drugega toka.

Dinamična podobnost = pri enakem Fr in Re št. imamo podoben razpored tlakov. To koristno uporabljamo pri poskusnih modelih, da dobimo na modelu kinematično in dinamično podoben pojav. V splošnem je skoraj nemogoče dobiti enakost obeh števil v naravi in na modelu. Če prevladujejo težnostne sile zagotovimo enakost Fr št., če viskozne pa Re št..

Laminarni tok: Tok teče v plasteh, Re<2300 v ceveh, Re<500 v kanalih, izgube energije so premosorazmerne s prvo potenco hitrosti. Lahko nastopa kot tok med dvema ploščama, tok v cevi, tok med koncentričnima ploskvama ali tok med dvema vrtinčnima diskoma. **Turbolentni tok**: izgube energije so sorazmerne s kvadratom hitrosti, vztrajnostne sile >> viskozne sile, Re>2300 cev, Re>500 kanal, zelo pogosto nastopa v praksi.

Konvekcijsko difuzijska enačba za turbolentni transport snovi:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint\rho dz = \iint_S \rho\vec{v}ds$$

$c=(m_{SNOVI}/(m_{SNOVI}+m_{OSTALO}))$
$m_{SNOVI}=c\cdot m_{VODE}$, $m_{SNOVI} << m_{VODE}$
Kontinuitetna enačba za dodatne snovi:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint c\rho dP = \iint_S c\rho\vec{v}ds$$

$$\iiint_P\left(\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + div(c\rho\vec{v})\right)dP = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho) + div(c\rho\vec{v}) = 0$$

predpostavimo nestis. tek. (ρ=konst):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + div(c\vec{v}) = 0 \qquad \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c u_i}{\partial x_i} = 0$$

c=c +c' c =povp. c'=odstop.

$u_i = u_i^- + u_i'$ upoštevamo c'=0 in $c' \cdot u_i = 0$

Dobimo enačbo za povprečne vrednosti:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} + \frac{\partial (c' u_i')}{\partial x_i} = 0$$

Zadnji člen predstavlja turbolenten tok snovi, ki ga izrazimo s pomočjo pikovega zakona. J=transport snovi= $c'u_i' = -D_{ti} \cdot (\partial c^- / \partial x_i)$ $-D_{ti}$=turbolentni difuzijski koef. za transport snovi. Končna oblika enačbe:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{c}}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(D_{tx}\frac{\partial \bar{c}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(D_{ty}\frac{\partial \bar{c}}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(D_{tz}\frac{\partial \bar{c}}{\partial z}) + izvor / ponor$$

Upor: upor trenja ali viskozni upor nastane zaradi strižnih napetosti, oz. zaradi viskoznosti in gradientov hitrosti ob površini telesa, ki povzročajo sile, ki so v vsaki točki tangencialne na površino. Upor oblike nastane zaradi norm.nap. (tlakov), ki so razporejeni neenakomerno vzdolž površine telesa. Dinamični vzgon navadno računamo upoštevamo ločeno od upora.

$$F_t = \int_s \tau_p \sin\Phi dS \qquad F_p = -\int_S p\cos\Phi dS$$

Praktično računamo silo upora po enačbi:

$F_U = c \cdot (\rho v^2/2) \cdot S$ kjer je c=koef (tabele)