MATEMATIČNO MODELIRANJE OKOLJSKIH PROCESOV

POROČILO VAJE

VAJA 2: 1D TRANSPORT SNOVI

8.6.2015

1 PROBLEM

Imamo reko z naslednjimi podatki:

padec dna	$I = 0.0019$
povprečna širina	$b = 59\ \mathrm{m}$
globina	$h = 1\ \mathrm{m}$
Manningov koeficient hrapavosti	$n_G = 0.029\ \mathrm{s/m^{\frac{1}{3}}}$

- V prvem primeru je nad prečnim profilom pri $x = 0$ koncentracija polutanta enaka $c = 1\ \mathrm{g/m^3}$. Na odseku dolvodno, $x > 0$, je ob času $t = 0$ koncentracija $c = 0$. Določi razpored koncentracije vzdolž reke ob času $t = 10\ \mathrm{min}$ in $t = 20\ \mathrm{min}$ ter časovni potek koncentracije v profilu $x = 1000\ \mathrm{m}$.
- V drugem primeru ob času $t = 0$ vržemo v reko maso sledila $m = 109\ \mathrm{kg}$, ki ga na kratkem odseku pomešamo po celi širini. Določi razpored koncentracije vzdolž reke ob času $t = 10\ \mathrm{min}$ in $t = 20\ \mathrm{min}$ ter časovni potek koncentracije v profilu $x = 1000\ \mathrm{m}$.

2 TEORETIČNI UVOD

Tok v reki obravnavamo kot turbulentni tok, zato vzdolžno hitrost u in koncentracijo c zapišemo kot:

$$u(t) = \overline{u} + u'(t)$$

$$c(t) = \overline{c} + c'(t)$$

Izpeljavo začnemo z zapisom kontinuitetne enačbe za kontrolni volumen dimenzij dx, dy in dz.
Vtok snovi v kontrolni volumen v smeri osi x: $(\rho cu)dy\ dz$
Iztok snovi iz kontrolnega volumna v smeri osi x: $(\rho cu)dy\ dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho cu)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Upoštevamo, da je neto sprememba mase snovi pri toku skozi kontrolni volumen enaka časovni spremembi mase snovi v volumnu:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho cu)\mathrm{dydz} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho c)\mathrm{d}x\mathrm{dydz}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho cu) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho c)$$

Sedaj upoštevamo turbulentni zapis hitrosti in koncentracije, ter predpostavimo, da se gostota tekočine ne spremeni zaradi polutanta:

$$\rho \frac{\partial c}{\partial t} + \rho \frac{\partial (cu)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(\overline{c} + c')}{\partial t} + \frac{\partial[(\overline{c} + c')(\overline{u} + u')]}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{c}\,\overline{u}) + \frac{\partial}{\partial x}\overline{c'u'} = 0$$

Z upoštevanjem $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ dobimo:

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{c}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\overline{c'u'} = 0 \tag{1}$$

Časovno povprečen produkt amplitud fluktuacij hitrosti in koncentracij opišemo s Fickovim zakonom

$$\overline{c'u'} = -D_{ix}\frac{\partial \overline{c}}{\partial x}$$

kjer je D_{ix} koeficient turbulentne difuzije v smeri x. Koeficient zajema tako molekularno in advekcijsko difuzijo. Gornjo enačbo nesemo v enačbo (1) in dobimo:

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{D_{ix}\partial \overline{c}}{\partial x}\right) \tag{2}$$

Ker obravnavamo 1D problem, predpostavimo, da je snov popolnoma premešana smeri z in$y$. Zaradi tega lahko vpeljemo namesto koeficienta D_{ix} koeficient longitudinalne disperzije D_L.

$$\frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{D_L\partial \overline{c}}{\partial x}\right) \tag{3}$$

Koeficient longitudinalne disperzije D_L so podali mnogi avtorji:

Parker (1961)	$D_L = 14.28\sqrt{2gR^3I}$	
McQuivery in Keefer (1974)	$D_L = 0.058\frac{uh}{I}$	
Fischer (1975)	$D_L = 0.011\frac{(ub)^2}{hu_*}$	$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \tau = \rho g h$
Liu (1977)	$D_L = 0.18\, hu_*\left(\frac{b}{h}\right)^2\left(\frac{u}{u_*}\right)^{0.5}$	

Iwasa in Aya (1991) $$D_L = 2hu_* \left(\frac{b}{h}\right)^{0.5}$$

Seo in Cheong (1998) $$D_L = 5.915\; hu_* \left(\frac{b}{h}\right)^{0.62} \left(\frac{u}{u_*}\right)^{1.428}$$

2.1 ODSEK S KONSTANTNO KONCENTRACIJO

Pri reševanju prvega problema upoštevamo naslednje pogoje:

Začetni pogoj: $$c(x,0) = 0, \qquad x > 0$$

Robni pogoj $$\begin{aligned} c(0,t) &= c_0, \qquad t \geq 0 \\ c(\infty,t) &= 0, \qquad t \geq 0 \end{aligned}$$

S temi pogoji dobimo analitično rešitev enačbe (3):

$$c(x,t) = \frac{c_0}{2}\left[e^{\frac{ux}{D_L}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x+ut}{2\sqrt{D_L t}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{D_L t}}\right)\right] \tag{4}$$

$$\operatorname{erfc}(\alpha) = 1 - \operatorname{erf}(\alpha) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\alpha e^{-\eta^2}\, d\eta$$

Vzdolžno hitrost u izračunamo po Manningovi enačbi:

$$u = \frac{1}{n_G} R^{\frac{2}{3}}\sqrt{I} \tag{5}$$

2.2 TOČKOVNI VNOS POLUTANTA

Pri reševanju drugega problema upoštevamo naslednje pogoje:

Začetni pogoj: $$c(x=0,0) = \frac{m}{dbh}$$

Robni pogoj $$c(\pm\infty,t) = 0, \qquad t \geq 0$$

S temi pogoji dobimo analitično rešitev:

$$c(x,t) = \frac{m}{bh\sqrt{4\pi D_L t}}\, e^{\frac{(x-ut)^2}{4D_L t}} \tag{6}$$

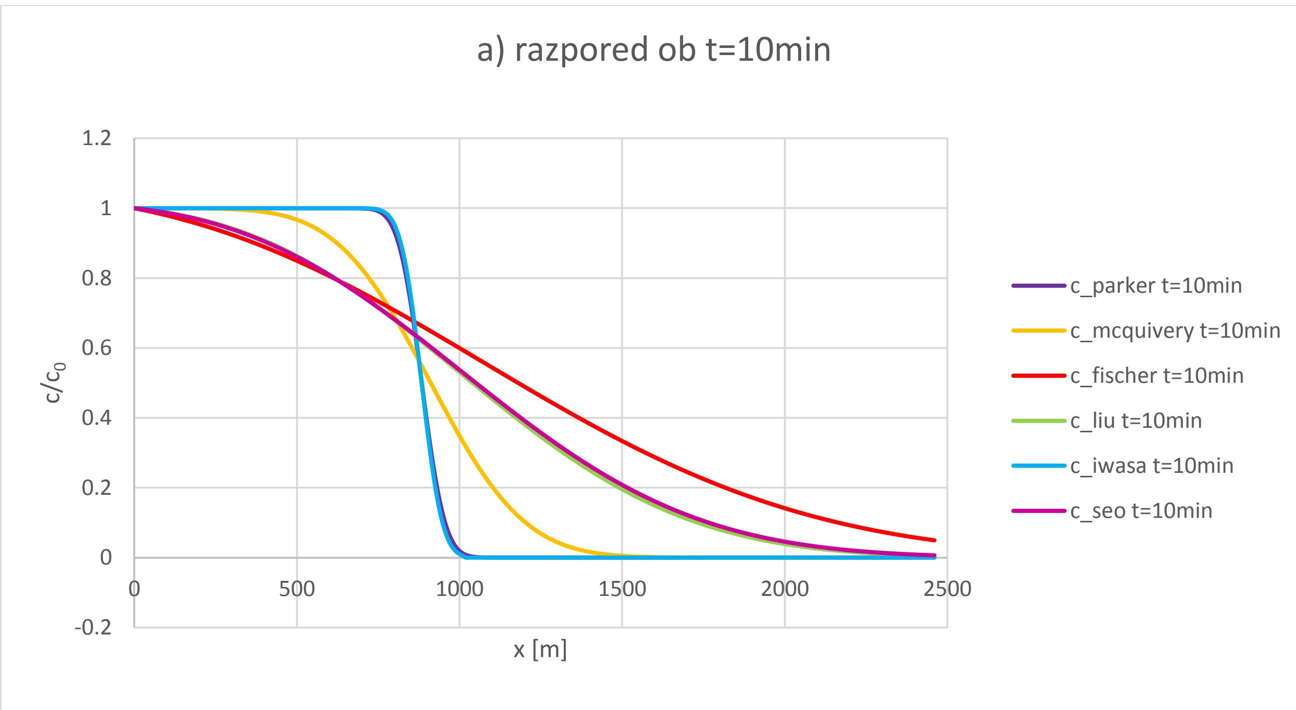
3 POSTOPEK REŠEVANJA

Vajo rešujemo po naslednjih korakih:

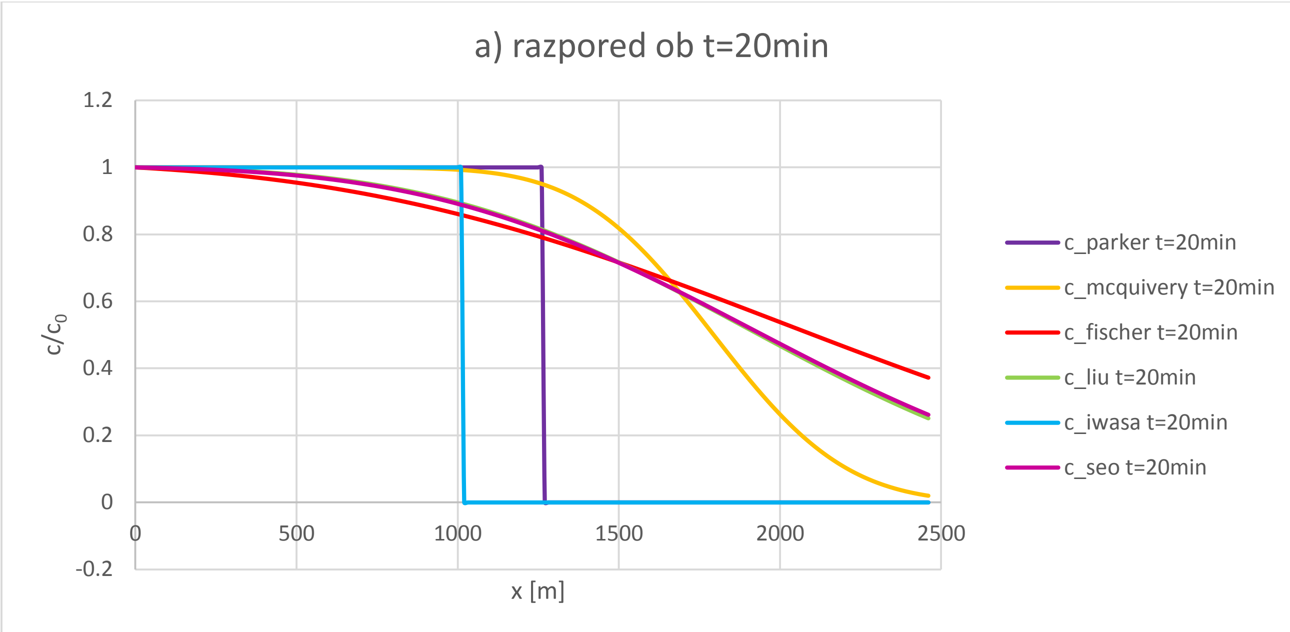
- Izračun vzdolžne hitrosti u po Manningovi enačbi (enačba (5)).
- Izračun koeficienta longitudinalne disperzije D_L po vseh navedenih metodah.
- Izračun prvega primera po enačbi (4) ob času $t = 10 \text{ min}$ in $t = 20 \text{ min}$ ter časovni potek koncentracije v profilu $x = 1000 \text{ m}$.
- Izračun drugega primera po enačbi (6) ob času $t = 10 \text{ min}$ in $t = 20 \text{ min}$ ter časovni potek koncentracije v profilu $x = 1000 \text{ m}$.

4 REZULTATI

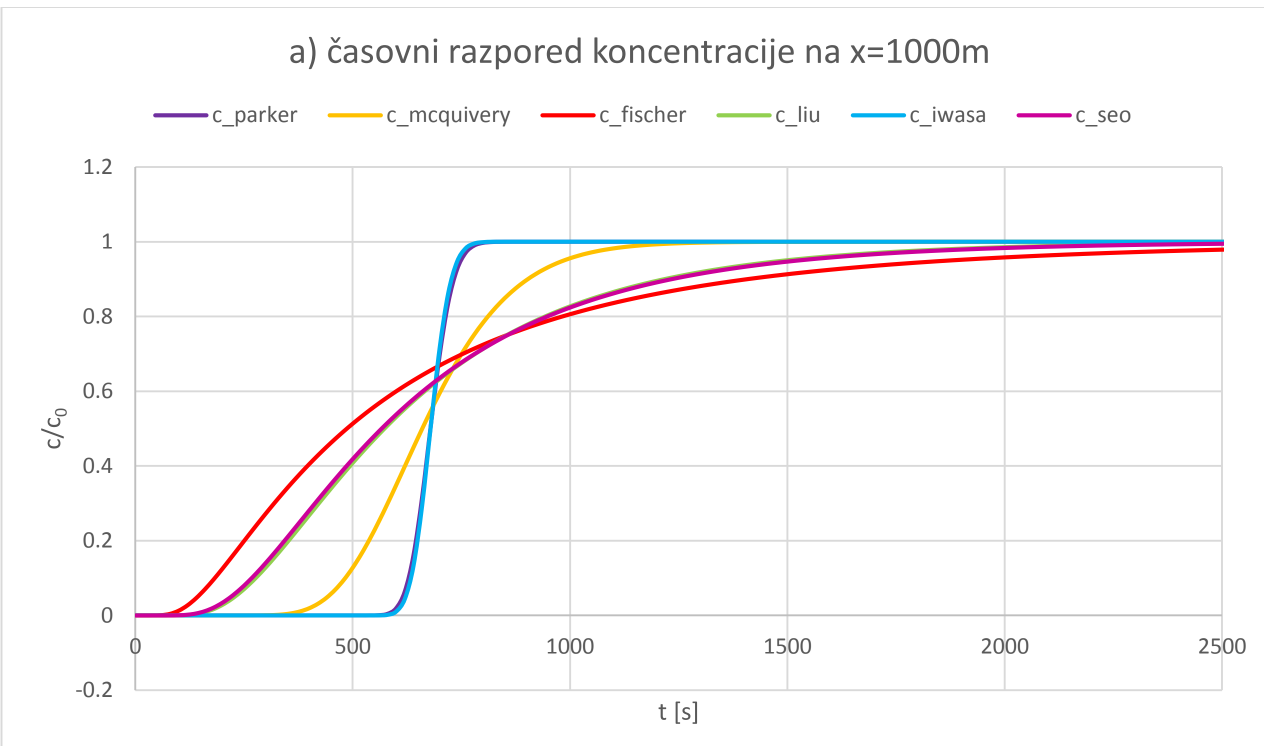
4.1 ODSEK S KONSTANTNO KONCENTRACIJO



Slika 1 Razpored koncentracije vzdolž kanala po času 10 min za primer enakomerne razporeditve turbublence po globini.

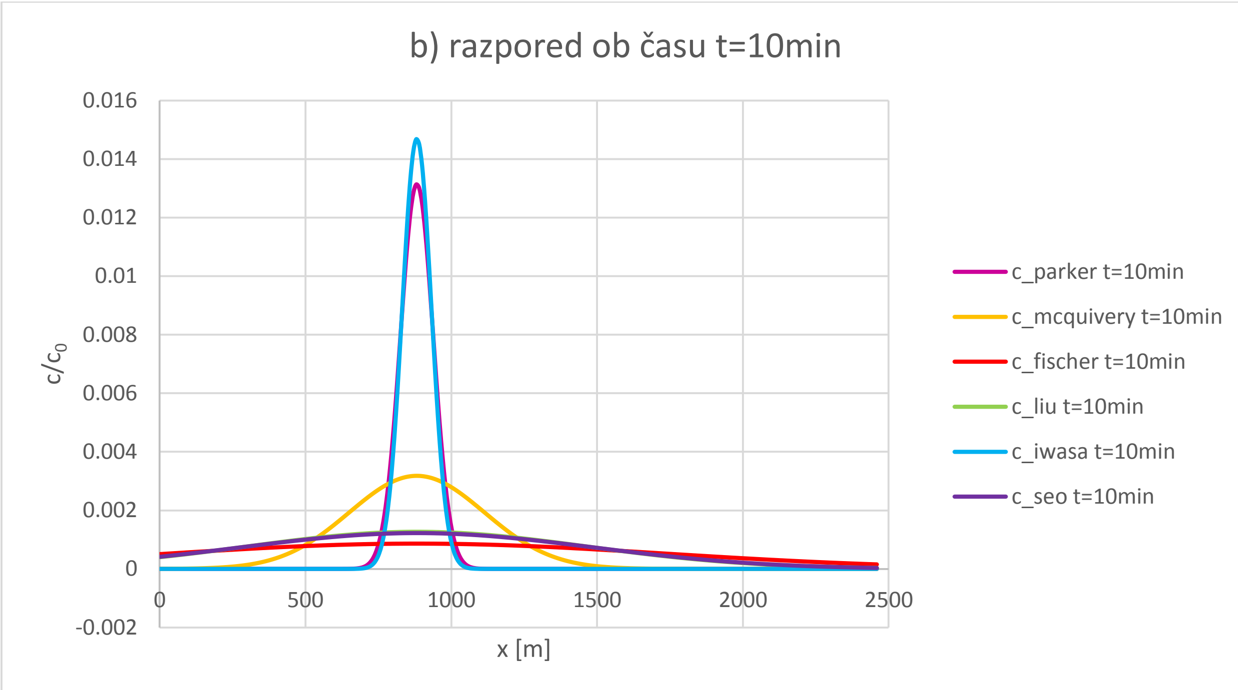


Slika 2 Razpored koncentracije vzdolž kanala po času 20 min za primer enakomerne razporeditve turbublence po globini.

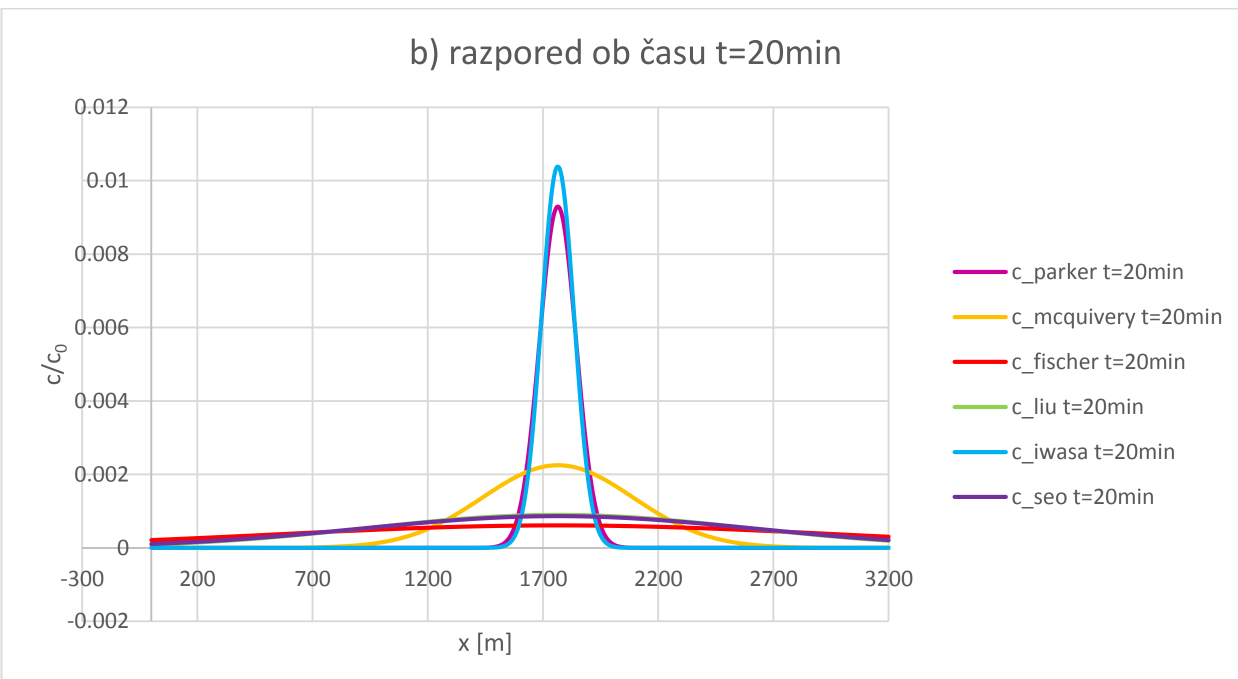


Slika 3 Časovni razpored koncentracije v kanalu na razdalji X=1000 m za primer enakomerne razporeditve turbublence po globini.

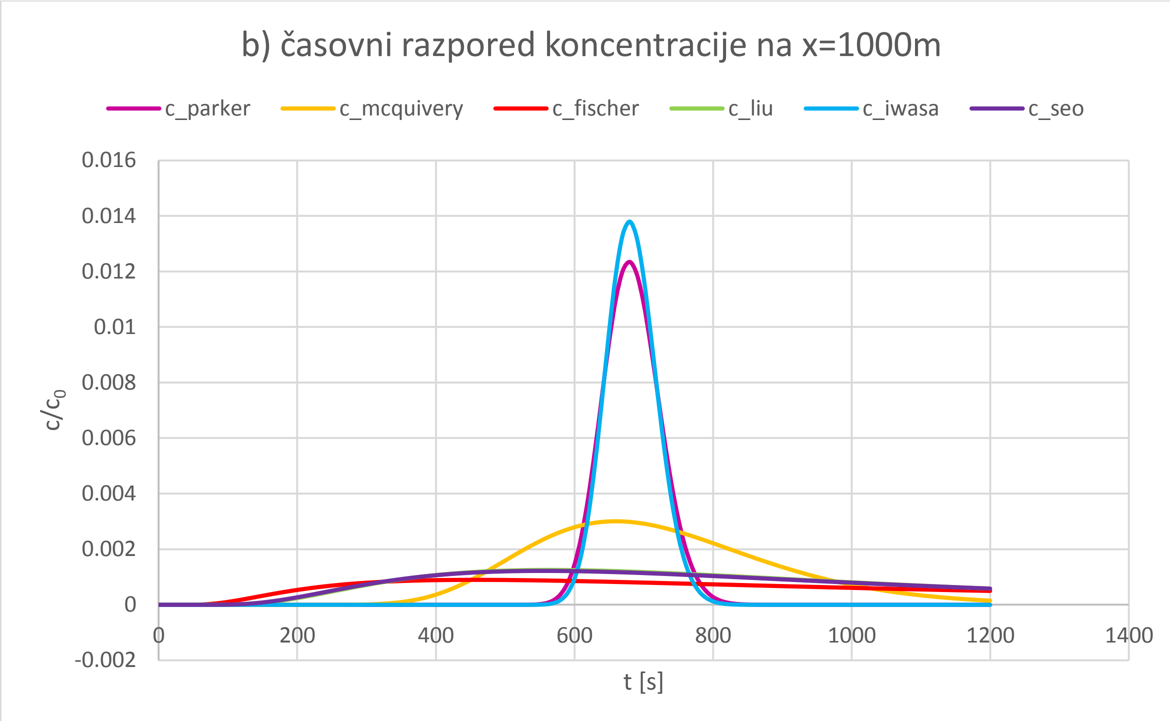
4.2 TOČKOVNI VNOS POLUTANTA



Slika 4 Razpored koncentracije vzdolž kanala po času 10 min za primer neenakomerne razporeditve turbublence po globini.



Slika 5 Razpored koncentracije vzdolž kanala po času 20 min za primer neenakomerne razporeditve turbublence po globini.



Slika 6 Časovni razpored koncentracije v kanalu na razdalji X=1000 m za primer neenakomerne razporeditve turbublence po globini.

5 KOMENTAR

V primeru enakomerne razporeditve turbulence, kjer imamo enako koncentracijo $c/c_0 = 1$ po celotnem območju $x < 0$, se koncentracija premika kot zid vzdolž toka. Manjši kot je koeficient longitudinalne disperzije bolj oster oziroma bolj vertikalen ostaja prehod. Po daljšem času je prehod položnejši in premaknjen nižje vzdolž toka. Pri uporabi longitudinalnega koeficienta difuzije po Parkerju in po Iwasi ter Ayi rezultata pri približno od $x > 1000$ m ni bilo mogoče več izvrednotiti, saj je eksponentni člen v enačbi (4) postane prevelik. Zaradi tega, na Slika 2 opazimo dva ostra stopničasta grafa.

V primeru neenakomerne razporeditve turbulence problemov s stabilnostjo rešitve nisem opazil. Čas opazovanja vpliva na višino in položaj vala koncentracije. Po daljšem času se val nahaja nižje vzdolž toka (večji x), valovi pa so nižji in širši. Večji kot je koeficient longitudinalne difuzije širši je val.

Na Slika 6Slika 3 lepo vidimo, da potek koncentracije poganjata dva procesa, difuzija in tok vode. Težišče vala koncentracije doseže opazovani presek istočasno pri vseh koeficientih difuzije. Slednji vpliva le na raztegnjenost tega vala.