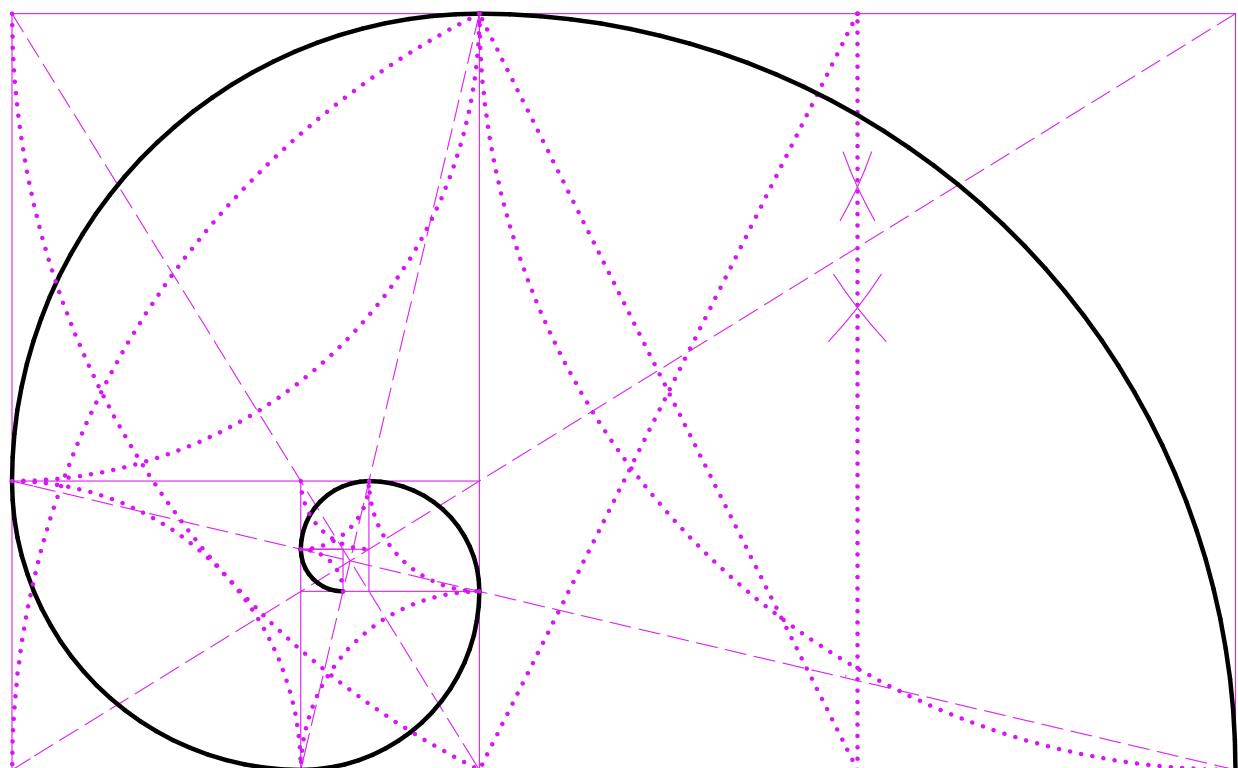




**Evropski  
Socialni  
Sklad**



**Center  
RS  
za poklicno  
izobraževanje**



Emilija Krempuš

**Osnovne planimetrijske konstrukcije**

**Priročnik**

**Osnovne planimetrijske konstrukcije  
Priročnik**

Priročnik Osnovne planimetrijske konstrukcije je nastal s finančno pomočjo Evropskega socialnega sklada.

Avtorica:

Emilija Krempuš, univ. dipl. inž. arh.

Sodelovala:

Meta Petriček, univ. dipl. inž. arh.

Rokopis so pregledali:

Maja Capuder, univ. dipl. inž. arh.

Smiljan Čujež, prof. matematike

Lektorirala:

Metka Fendre, prof. slovenščine in angleščine

Računalniška obdelava:

program ArchiCAD

in program Word

Oblikovanje in grafična priprava:

Designpro, d. o. o.

Ljubljana, 2006

**KAZALO**

<b>UVOD</b>	7
<b>1 ČRTE IN KOTI</b>	9
1.1 Risanje planimetrijskih konstrukcij s pomočjo dveh trikotnikov	9
1.1.1 Risanje vzporednice in pravokotnice s pomočjo dveh trikotnikov	9
1.1.2 Risanje črt s pomočjo priložnega ravnila in trikotnika	10
1.2 Črte	11
1.3 Risanje vzporednice dani premici skozi dano zunanjtočko	11
1.4 Risanje premice skozi dano točko in nedostopno presečišče dveh danih premic	12
1.4.1 Risanje premice – dana točka je med premicama	12
1.4.2 Risanje premice – dana točka je zunaj premic	12
1.5.1 Simetrala daljice – 1. način	13
1.5.2 Simetrala daljice – 2. način	13
1.6 Delitev daljice na 2, 4, 8, 16 ... enakih delov	14
1.7 Delitev daljice na $n$ enakih delov	14
1.8.1 Delitev daljice v razmerju $m : n$ – 1. način	15
1.8.2 Delitev daljice v razmerju $m : n$ – 2. način	16
1.9 Zlati rez	17
1.9.2 Podaljšanje daljice v zlatem rezu	17
1.9.4 Zlati pravokotnik	18
1.10 Formatiranje listov po DIN-u	19
1.11.1 Pravokotnica na premico v dani točki na premici – 1. način	20
1.11.2 Pravokotnica na premico v dani točki na premici – 2. način	20
1.11.3 Pravokotnica na premico v dani točki na premici – 3. način	21
1.12 Pravokotnica na premico skozi dano zunanjtočko	21
1.13 Kot	22
1.14 Načrtovanje kota $60^\circ$	22
1.15 Delitev pravega kota na tretjine	23
1.16 Prenos kota – risanje danemu kotu skladnega kota	24
1.17 Delitev kota na enake dele	24
1.18 Simetrala kota – 1. način	25
1.19 Delitev kota na 4, 8, 16 ... enakih delov – 1. način	25
1.20 Simetrala kota – 2. način	26
1.21 Določitev četrtrine, osmine, šestnajstine ... danega kota – 2. način	26
1.22 Delitev kota na tretjine s papirnim trakom	27
1.23 Metode za delitev kota na poljubno število enakih delov	27
1.24 Približna konstrukcija delitve ostrega kota na liho število enakih delov	28
1.24.1 Delitev ostrega kota na 3 enake dele	28
1.24.2 Delitev ostrega kota na 5 enakih delov	28
1.25 Približna konstrukcija delitve topega kota na liho število enakih delov	29
1.25.1 Delitev topega kota na 3 enake dele	29
1.25.2 Delitev topega kota na 5 enakih delov	29

<b>2</b>	<b>KROG, KROŽNICA IN KROŽNI LOK</b>	30
2.1	Krog, krožnica in krožni lok .....	30
2.2	Elementi kroga .....	30
2.3	Deli kroga .....	31
2.4	Središčni in obodni kot .....	31
2.5	Kot v polkrogu, Talesov izrek .....	32
2.6	Risanje krožnega loka z danim polmerom skozi dani točki .....	33
2.6.1	Označevanje središča kroga in krožnega loka .....	33
2.7	Določanje središča danega krožnega loka .....	34
2.8	Risanje krožnega loka skozi tri dane točke .....	34
2.9	Tangenta na krožnico v dani točki krožnice .....	35
2.10	Tangenti na krožnico iz dane zunanje točke .....	35
2.11	Zravnjanje polovice krožnice z danim polmerom (A. Kochansky) ..	36
2.12	Določanje središča in dotikalih dane krožnice z danima tangentama .....	37
2.13	Krožni prehod v ostrem kotu .....	38
2.14	Krožni prehod v topem kotu .....	38
2.15	Izbočeni krožni prehod v pravem kotu .....	39
2.16	Vbočeni krožni prehod v poljubnem kotu .....	39
2.17	Zunanji tangenti na krožnici z različnimi polmeroma .....	40
2.18	Notranji tangenti na krožnici z različnimi polmeroma .....	41
2.19	Trikotniku očrtani krog .....	42
2.20	Določanje središča včrtanemu krogu, ki se dotika treh danih tangent .....	42
2.21	Trikotniku včrtani krog .....	42
2.22	Pravokotniku očrtani krog .....	43
2.23	Kvadratu očrtani in včrtani krog .....	43
2.24	Rombu včrtani krog .....	44
2.25	Deltoidu včrtani krog .....	44
2.26	Pravilnemu mnogokotniku očrtani in včrtani krog .....	45
<b>3</b>	<b>TRIKOTNIKI</b> .....	46
3.1	Načrtovanje trikotnika, če so dane tri stranice (sss) .....	46
3.2	Načrtovanje trikotnika, če sta dani stranici in kot med njima (sks) ..	47
3.3	Načrtovanje trikotnika, če sta dana stranica in njej priležna kota (ksk) .....	47
3.4	Načrtovanje trikotnika, če sta dani stranici in kot, ki leži daljši stranici nasproti (Ssk) .....	48
3.4.1	Dani sta stranici in ostri kot, ki leži daljši stranici nasproti (Ssk) .....	48
3.4.2	Dani sta stranici in topi kot, ki leži daljši stranici nasproti (Ssk) .....	48
3.5	Načrtovanje trikotnika, če sta dani stranici in kot, ki leži krajevi stranici nasproti (Ssk) – osnovni postopek .....	49
3.5.1	Možnost 1: V trikotniku je dolžina stranice $a$ krajeva od dolžine $v_c$ ..	49
3.5.2	Možnost 2: V trikotniku je dolžina stranice $a$ enaka dolžini $v_c$ ..	50
3.5.3	Možnost 3: V trikotniku je dolžina stranice $a$ večja od dolžine $v_c$ ..	51

<b>4</b>	<b>PRAVILNI MNOGOKOTNIK V OČRTANEM KROGU . . . . .</b>	52
4.1	Načrtovanje pravilnih mnogokotnikov . . . . .	52
4.2	Enačbe za izračun elementov v pravilnem mnogokotniku . . . . .	52
4.3	Enakostranični trikotnik . . . . .	53
4.4	Pravilni šestkotnik . . . . .	53
4.5	Kvadrat . . . . .	54
4.6	Pravilni dvanajstkotnik . . . . .	54
4.7	Pravilni petkotnik in pravilni desetkotnik – osnovni postopek . . . . .	55
4.8	Pravilni petkotnik . . . . .	55
4.9	Pravilni desetkotnik . . . . .	55
4.10	Pravilni osemkotnik v očrtanem krogu . . . . .	56
4.11	Pravilni osemkotnik v očrtanem kvadratu . . . . .	56
4.12	Približna konstrukcija pravilnega sedemkotnika . . . . .	57
4.13	Približna konstrukcija pravilnega devetkotnika . . . . .	58
4.14	Približna konstrukcija pravilnega enajstkotnika . . . . .	58
4.15	Približna konstrukcija pravilnega mnogokotnika v očrtanem krogu – splošni način . . . . .	59
4.16	Pravilni $2n$ -kotnik . . . . .	60
4.17	Pravilni petnajstkotnik . . . . .	61
4.18	Pravilni sedemnajstkotnik . . . . .	62
4.19	Pravilni enainpetdesetkotnik . . . . .	64
4.20	Pravilni petinosemdesetkotnik . . . . .	65
<b>5</b>	<b>PRAVILNI MNOGOKOTNIK ZZNANO STRANICO . . . . .</b>	66
5.1	Enakostranični trikotnik . . . . .	66
5.2	Kvadrat . . . . .	66
5.3	Pravilni petkotnik . . . . .	67
5.4	Pravilni šestkotnik . . . . .	68
5.5	Približna konstrukcija pravilnega petkotnika – splošni način . . . . .	69
5.6	Približna konstrukcija pravilnega mnogokotnika, če je število stranic večje od 6 – splošni način . . . . .	70
5.7	Konstrukcija pravilnega mnogokotnika z znano stranico z upoštevanjem pravil podobnosti – splošni način . . . . .	71
<b>6</b>	<b>ELIPSA . . . . .</b>	72
6.1	Oznake pri elipsi . . . . .	72
6.2	Načrtovanje elipse po definiciji . . . . .	73
6.3	Načrtovanje elipse na osnovi »vrtnarske metode« . . . . .	74
6.4	Načrtovanje elipse s pomočjo velike in male krožnice . . . . .	75
6.5	Načrtovanje elipse s temenskimi pritisnjjenimi krožnimi loki . . . . .	76
6.6	Načrtovanje elipse s papirnim trakom . . . . .	77
6.7	Elipsa je dana s konjugiranimi premeroma . . . . .	78
6.8	Določanje osi elipse, če sta znana konjugirana premera (Rytzova metoda) . . . . .	79
6.9	Tangenta in normala na elipso v dani točki elipse . . . . .	80
6.10	Tangentni na elipso iz dane zunanjne točke . . . . .	81

<b>7</b>	<b>OVALNE KRIVULJE</b>	82
7.1	Oval	82
<b>8</b>	<b>HIPERBOLA</b>	83
8.1	Oznake pri hiperboli	83
8.2	Načrtovanje hiperbole po definiciji	84
8.3	Tangenta in normala na hiperbolo v dani točki hiperbole	86
8.4	Tangentni na hiperbolo iz dane zunanjosti točke	87
<b>9</b>	<b>PARABOLA</b>	88
9.1	Oznake pri paraboli	88
9.2	Načrtovanje parabole po definiciji	89
9.3	Parabola je dana z dvema tangentama in njunima dotikališčema na paraboli	90
9.4	Parabola je dana s temensko tangento in z goriščem	91
9.5	Parabola je dana s konjugiranim premerom in tetivo	92
9.6	Tangenta in normala na parabolo v dani točki parabole	93
9.7	Tangentni na parabolo iz dane zunanjosti točke	94
<b>10</b>	<b>LOKI V STAVBARSTVU</b>	95
10.1	Oblike lokov	95
10.2	Oblike lokov	96
10.3	Oblike lokov	97
10.4	Oblike lokov	98
10.5	Dvigajoči lok	99
10.6	Eliptični lok	99
10.7	Košarasti lok – 1. način konstrukcije	100
10.8	Košarasti lok – 2. način konstrukcije	101
<b>VIRI IN LITERATURA</b>		102

## UVOD

Pred vami je priročnik, v katerem boste našli napotke za ročno risanje osnovnih planimetrijskih konstrukcij, risanih z ravnalom in s šestilom. S pomočjo vsebin, ki jih prinaša, boste pridobili ali obnovili znanje pravilnega izražanja konstruktivnih zamisli s tehničnimi risbami.

Priročnik je namenjen dijakom srednjih poklicnih in strokovnih šol, tehniških gimnazij, študentom višjih šol tehniške smeri ter kandidatom pri pripravljanju na delovodske in mojstrske izpite. Pri svojem nadalnjem poklicnem usposabljanju ga bodo lahko uporabljali zaposleni kot tudi tisti, ki želijo le obnoviti znanje načrtovanja planimetrijskih konstrukcij. Namen priročnika je pomagati uporabniku poiskati metode, ki mu bodo omogočile reševanje grafičnih problemov in risanje zahtevnejših tehničnih risarskih kompozicij v praksi, dijakom pa bo v pomoč pri predmetih, kot so opisna geometrija, tehnično risanje, visoke zgradbe, inženirske zgradbe in praktični pouk.

Vsebina je razdeljena na deset poglavij. V prvem in drugem poglavju so predstavljene osnovne planimetrijske konstrukcije, risane na osnovi ravnih črt, krogov in krožnih lokov. V tretjem poglavju so opisane konstrukcije trikotnikov z zanimimi podatki o stranicah in kotih trikotnika. V četrtem in petem poglavju so prikazane konstrukcije pravilnih mnogokotnikov v očrtanem krogu in pravilnih mnogokotnikov z znano stranico. V naslednjih štirih poglavjih so predstavljene osnovne konstrukcije elipse, ovala, hiperbole in parabole. V desetem, zadnjem poglavju, pa so zbrane konstrukcije lokov v stavbarstvu.

Posamezne konstrukcije so po poglavjih oštrevilčene in ustrezno naslovljene. Vsaka je podana s sliko in z opisom načina njene izdelave. Na sliki je končna rešitev poudarjena z močnejšimi črtami, pomožne konstrukcije pa so narisane s tanjšimi. V opisu slike so pomembnejši pojmi in delovni postopki poudarjeni ali izpisani v pošetnem tisku.

Uporabnikom želim veliko uspeha pri uporabi pričujoče knjige, saj sem njen vsebino zbrala in uredila na podlagi izkušenj pri delu v izobraževanju in v praksi.

Za sodelovanje pri izdelavi priročnika se zahvaljujem gospe Meti Petriček, univ. dipl. inž. arh., ter recenzentoma gospe Maji Capuder, univ. dipl. inž. arh., in gospodu Smiljanu Čuježu, prof. matematike.

Gospe Ireni Posavec, univ. dipl. inž. grad., se zahvaljujem za svetovanje pri oblikovanju vsebine, gospodoma Smiljanu Čuježu, prof. matematike, in Igorju Kastelicu, dipl. inž. grad., pa za svetovanje pri računalniški obdelavi podatkov.

Vse dobronamerne kritike in pripombe za izboljšanje vsebine bodo dobrodošle.

Emilija Krempuš

Ljubljana, 2005

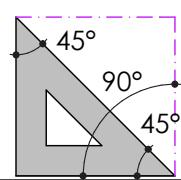


## 1 ČRTE IN KOTI

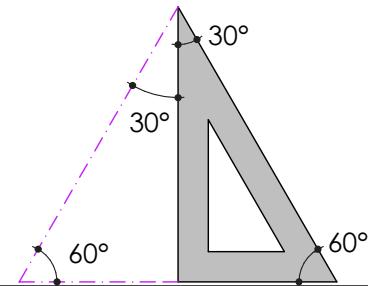
### 1.1 Risanje planimetrijskih konstrukcij s pomočjo dveh trikotnikov

Planimetrijske konstrukcije in tudi tehnične risbe, ki jih rišemo s pomočjo šestila in ravnila, lahko v praksi rišemo tudi s pomočjo šestila in dveh tipskih trikotnikov. En trikotnik je enakokraki pravokotni trikotnik (kota ob hipotenuzi merita po  $45^\circ$ ), drugi pa je raznostranični pravokotni trikotnik (kota ob hipotenuzi merita  $30^\circ$  in  $60^\circ$ ). Nekatere konstrukcije je na ta način mogoče narisati enostavno in hitreje. Z omenjenima trikotnikoma lahko narišemo kote  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  in  $90^\circ$  tudi brez uporabe šestila.

Risanje tehničnih risb bomo še poenostavili, če bomo risali z risalnimi orodji ob priložnem ravnili na risalni deski ali če bomo uporabljali tipske risalne mize.

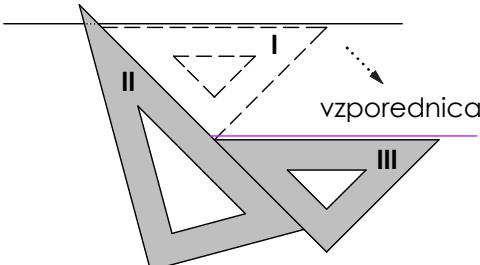


Slika 1: Enakokraki pravokotni trikotnik

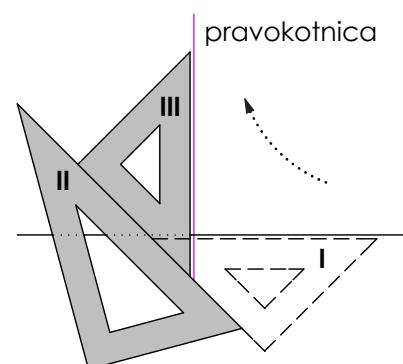


Slika 2: Raznostranični pravokotni trikotnik

#### 1.1.1 Risanje vzporednice in pravokotnice s pomočjo dveh trikotnikov

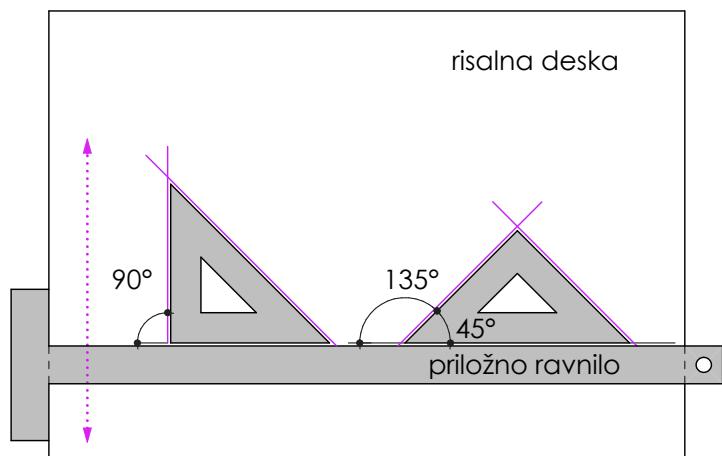
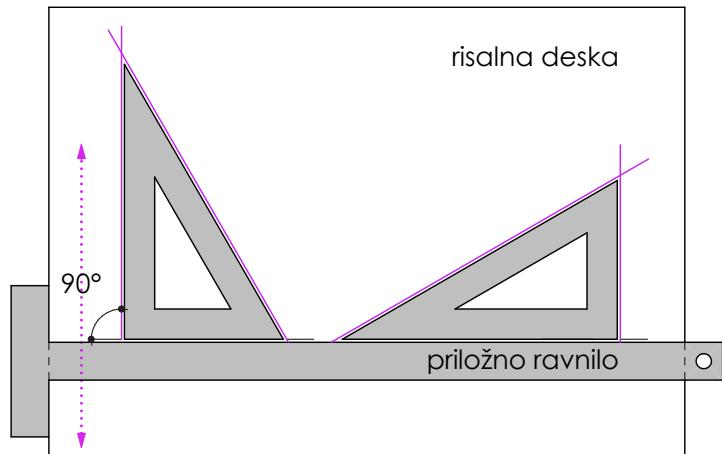


Slika 1: Risanje vzporednice

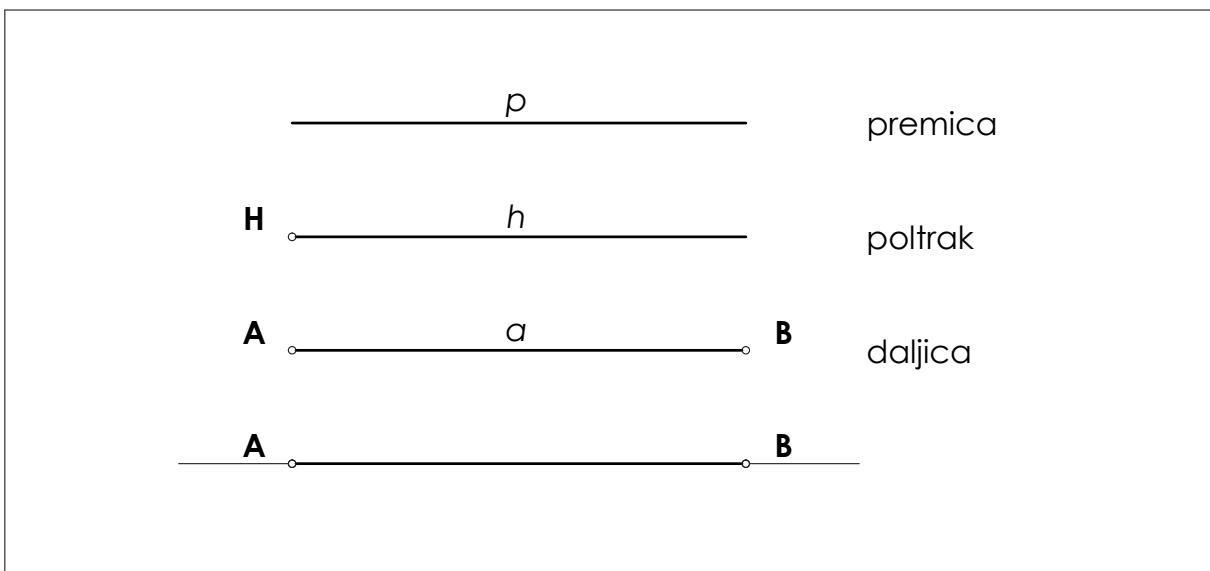


Slika 2: Risanje pravokotnice

### 1.1.2 Risanje črt s pomočjo priložnega ravnila in trikotnika



## 1.2 Črte



Premica je neomejena ravna črta.

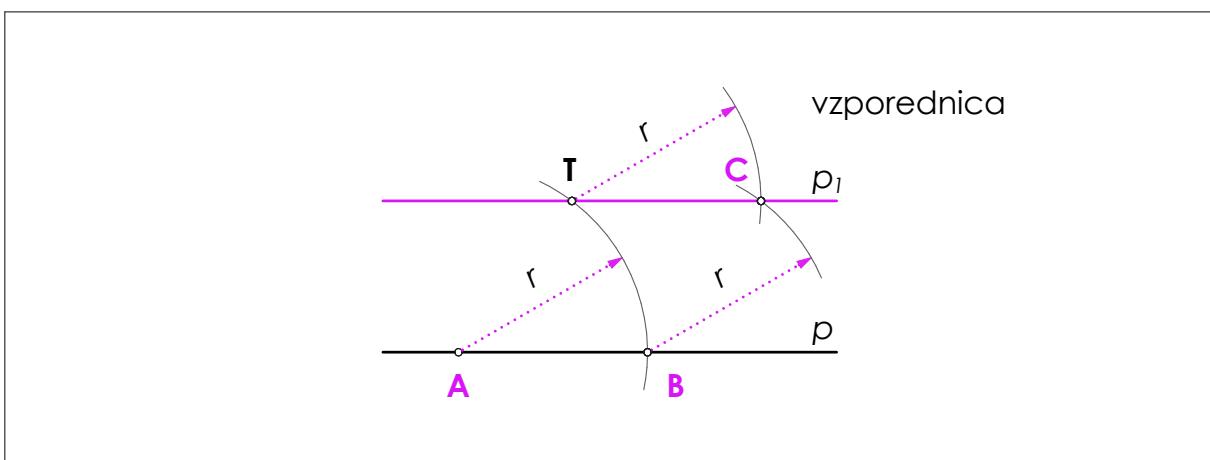
Poltrak je enostransko omejena ravna črta. Poltraku včasih rečemo tudi žarek (npr. v opisni geometriji).

Daljica je obojestransko omejena ravna črta.

Premica ( $A, B$ ) je nosilka daljice  $AB$ .

$|AB|$  Med navpičnima črticama označujemo absolutno vrednost dolžine daljice  $AB$ .

## 1.3 Risanje vzporednice dani premici skozi dano zunanjtočko



Dana točka  $T$  leži izven dane premice  $p$ . Iz poljubne točke  $A$  na premici  $p$  narišemo krožni lok s polmerom  $r$  skozi točko  $T$ . Krožni lok seka premico  $p$  v točki  $B$ . Iz točk  $B$  in  $T$  narišemo krožna loka z istim polmerom  $r$ . Krožna loka se sekata v točki  $C$ .

Premica  $p_1$ , ki jo narišemo skozi točki  $T$  in  $C$ , je vzporedna dani premici  $p$ .

## 1.4 Risanje premice skozi dano točko in nedostopno presečišče dveh danih premic

Dana točka **T** leži zunaj danih premic **p** in **q**.

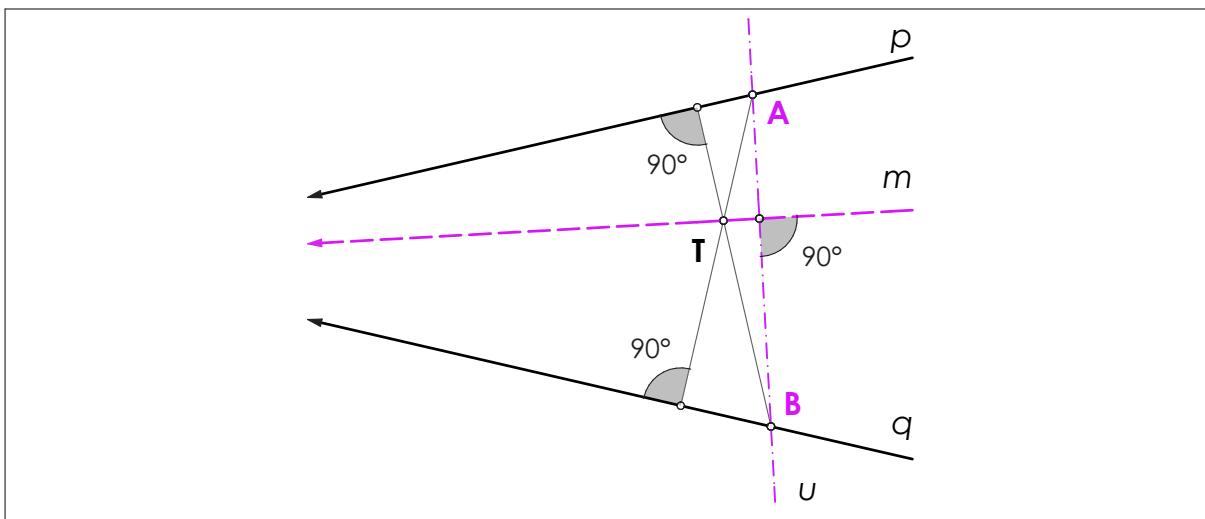
Skozi dano točko **T** narišemo pravokotnico na eno izmed danih premic (tukaj na premico **p**) in določimo presečišče **B** te pravokotnice z drugo dano premico **q**.

Nato narišemo pravokotnico skozi dano točko **T** še na drugo dano premico (tukaj na premico **q**) in določimo presečišče **A** te pravokotnice s prvo dano premico **p**.

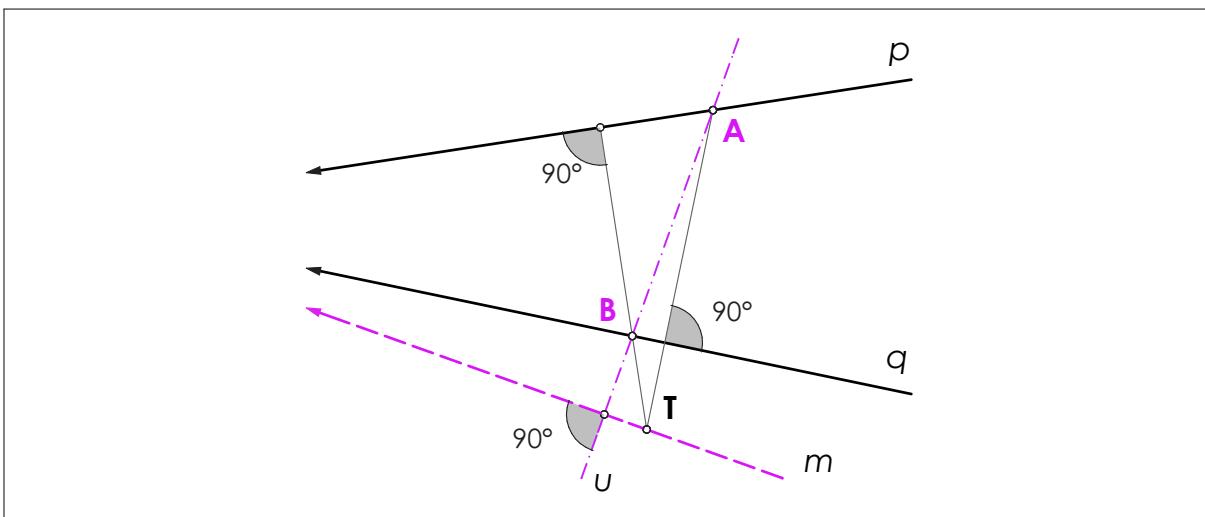
Skozi presečišči **A** in **B** narišemo premico **u**.

Pravokotnica na premico **u**, ki jo narišemo skozi dano točko **T**, je usmerjena točno v nedosegljivo presečišče premic **p** in **q**.

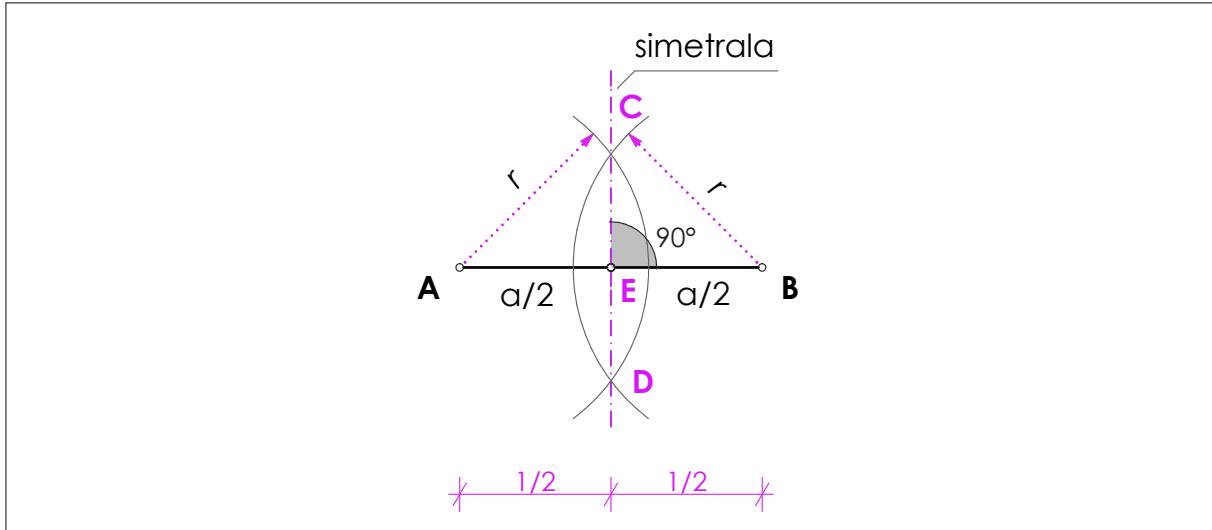
### 1.4.1 Risanje premice – dana točka je med premicama



### 1.4.2 Risanje premice – dana točka je zunaj premic

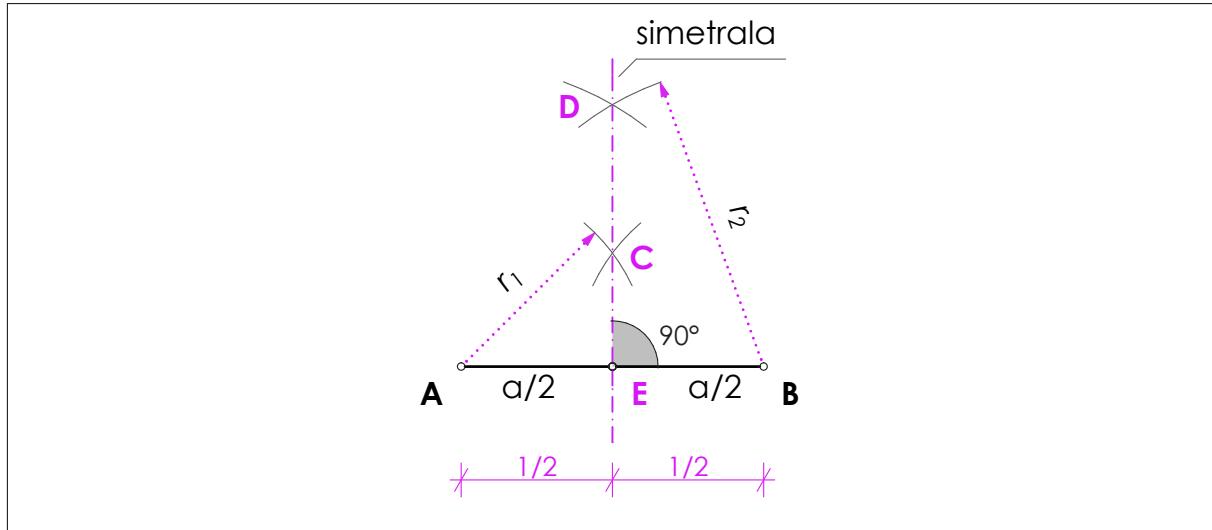


### 1.5.1 Simetrala daljice – 1. način



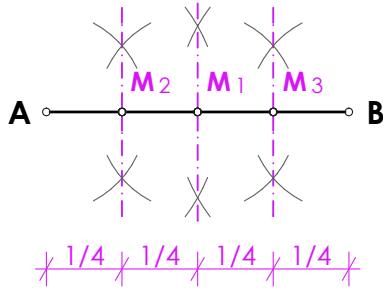
Dana je daljica  $\mathbf{a}$  s krajiščema  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$ . Iz krajišč  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$  daljice narišemo krožna loka z istim polmerom  $r$ , ki je večji od polovice dolžine daljice  $\mathbf{AB}$ , in določimo njuni presečišči  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{D}$ . Premica skozi točki  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{D}$  je simetrala daljice  $\mathbf{a}$ . Simetrala razpolavlja daljico  $\mathbf{AB}$  v točki  $\mathbf{E}$  in oklepa z njo pravi kot.

### 1.5.2 Simetrala daljice – 2. način



Dana je daljica  $\mathbf{a}$  s krajiščema  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$ . Iz krajišč  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$  daljice narišemo krožna loka s polmerom  $r_1$ , ki je večji od polovice dolžine daljice  $\mathbf{AB}$ , in določimo njuno presečišče  $\mathbf{C}$ . Nato narišemo še krožna loka s polmerom  $r_2$ , ki je večji od  $r_1$ , in določimo njuno presečišče  $\mathbf{D}$ . Premica skozi točki  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{D}$  je simetrala daljice  $\mathbf{a}$ . Simetrala razpolavlja daljico  $\mathbf{AB}$  v točki  $\mathbf{E}$  in oklepa z njo pravi kot.

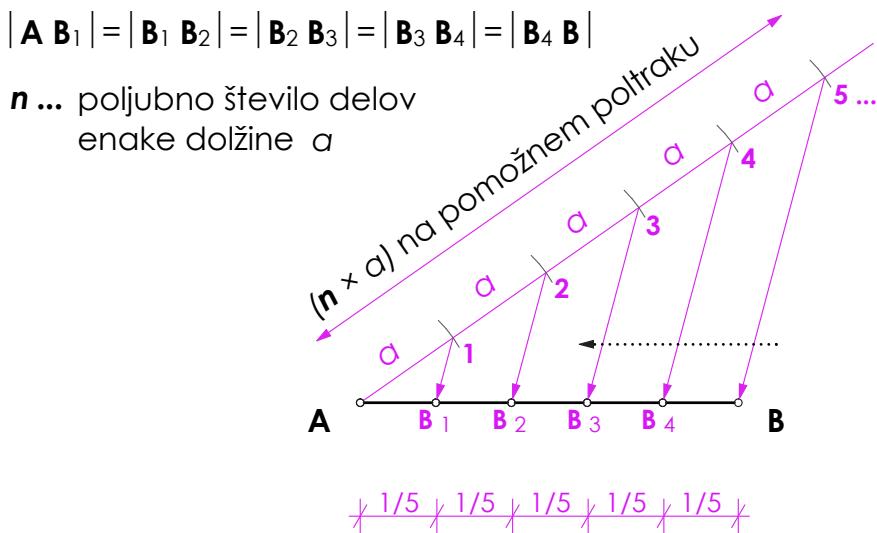
### 1.6 Delitev daljice na 2, 4, 8, 16 ... enakih delov



Dana je daljica **AB**. Narišemo simetralo daljice **AB**, da dobimo točko **M<sub>1</sub>**, ki razpolavlja daljico **AB**. Nato narišemo simetrali daljic **AM<sub>1</sub>** in **M<sub>1</sub>B**, da dobimo točki **M<sub>2</sub>** in **M<sub>3</sub>**. Tako razdelimo daljico **AB** na 4 enake dele.

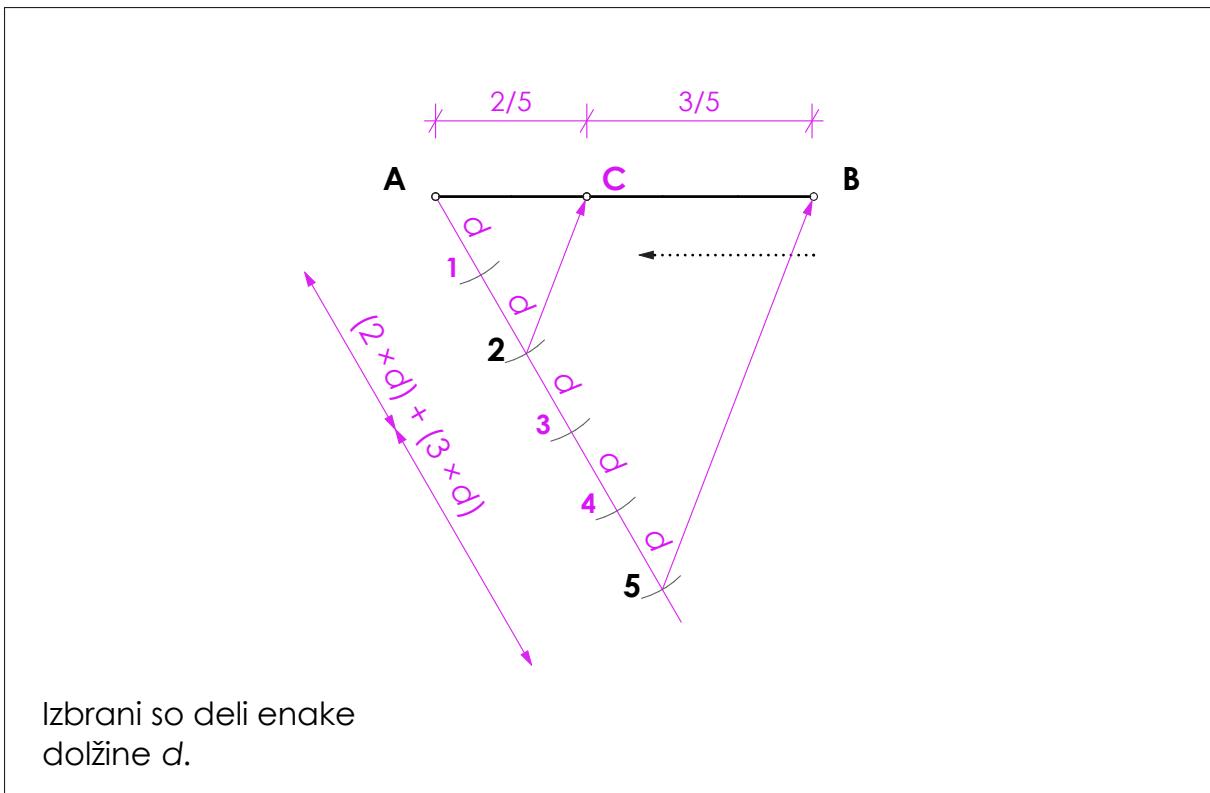
Če postopek ponavljamo, razdelimo daljico **AB** na 8, 16 ... enakih delov.

### 1.7 Delitev daljice na $n$ enakih delov



Dana je daljica **AB**. V enem izmed krajišč daljice **AB** (npr. v krajišču **A**) narišemo pomožni poltrak v poljubni smeri. Na poltrak s šestilom nanešemo od izbranega krajišča **A** toliko delov enake dolžine, na kolikor delov želimo razdeliti daljico **AB** (npr. 5 delov). Zadnjo delilno točko na pomožnem poltraku (točko **5**) zvežemo s še prostim krajiščem **B** daljice **AB**, da dobimo zveznicu točk **5** in **B**. Iz ostalih delišč na pomožnem poltraku (iz točk **4**, **3**, **2** in **1**) narišemo pomožne vzporednice zveznicu točk **5** in **B**. Vzporednice sekajo daljico **AB** v točkah **B<sub>1</sub>**, **B<sub>2</sub>**, **B<sub>3</sub>** in **B<sub>4</sub>** in jo delijo na zahtevano število enakih delov (tukaj je daljica **AB** razdeljena na 5 enakih delov).

### 1.8.1 Delitev doljice v razmerju $m : n$ – 1. način

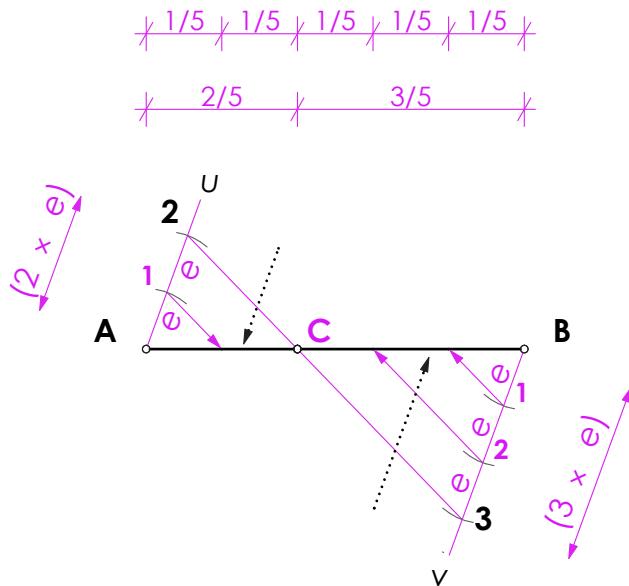


Dano doljico **AB** moramo razdeliti v razmerju  $m : n = 2 : 3$ .

V enem izmed krajišč doljice **AB** (npr. v krajišču **A**) narišemo pomožni poltrak v poljubni smeri. Na poltrak s šestilom nanesemo od izbranega krajišča **A** toliko delov enake dolžine, kot znaša vsota števil obeh vrednosti iz danega razmerja ( $m + n = 2 + 3 = 5$ ). Zadnjo delilno točko na pomožnem poltraku (točko **5**) zvezemo s še prostim krajiščem **B** doljice **AB**, da dobimo zveznico točk **5** in **B**. Pomožna vzporednica zveznici točk **5** in **B** iz točke **2** na pomožnem poltraku seka doljico **AB** v točki **C** in jo razdeli v razmerju **AC : CB = 2 : 3**.

Na enak način razdelimo doljico v razmerju, izraženem v odstotkih (npr. doljico **AB** razdelimo v razmerju  $40\% : 60\%$ ), pri čemer izberemo za odstotek primerno, velikosti risbe prilagojeno merilo.

### 1.8.2 Delitev doljice v razmerju $m : n$ – 2. način



Dano doljico **AB** moramo razdeliti v razmerju  $m : n = 2 : 3$ .

Iz krajišč doljice **AB** narišemo nasprotno usmerjena in vzporedna poltraka. V skladu z danim razmerjem nanesemo od krajišča **A** na poltrak **u** dva dela enake dolžine, od krajišča **B** pa nanesemo na poltrak **v** tri prav take dele. Zveznica točke **2**s točko **3** na obeh poltrakah seka doljico **AB** v točki **C** in jo deli v razmerju **AC : CB = 2 : 3**.

Na enak način razdelimo doljico v razmerju, izraženem v odstotkih (npr. doljico **AB** razdelimo v razmerju 40% : 60%), pri čemer izberemo za odstotek primerno, velikosti risbe prilagojeno merilo.

## 1.9 Zlati rez

Zlati rez je geometrijska delitev doljice na dva dela tako, da je razmerje celotne dolžine doljice proti daljšemu delu doljice enako razmerju med daljšim in krajiškim delom te doljice.

Predmeti, ki so proporcionirani v zlatem rezu, imajo lepe in harmonične oblike. To so izkoristili mnogi arhitekti, slikarji in drugi umetniki, ki so uporabili zlati rez za proporcioniranje arhitektonskih, slikarskih in drugih umetniških stvaritev.

### 1.9.1 Delitev doljice v zlatem rezu

$$|\mathbf{AB}| : |\mathbf{AT}| = |\mathbf{AT}| : |\mathbf{TB}| = \Phi : 1$$

$$\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$$

$$\Phi \approx 1.618$$

Dana je doljica **AB**. V krajišču **B** narišemo pravokotnico in nanjo nanesemo polovico dolžine doljice **AB**, da dobimo presečišče **C**. Točki **A** in **C** zvežemo z doljico **AC**. Iz presečišča **C** narišemo krožni lok skozi točko **B**, da dobimo presečišče **D** na doljici **AC**. Dolžino doljice **AD** prenesemo na doljico **AB**, da dobimo točko **T**, ki deli doljico **AB** v zlatem rezu.

### 1.9.2 Podaljšanje doljice v zlatem rezu

$$|\mathbf{ER}| : |\mathbf{EF}| = |\mathbf{EF}| : |\mathbf{FR}| = \Phi : 1$$

$$\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$$

$$\Phi \approx 1.618$$

Dana je doljica **EF**. Narišemo simetralo doljice **EF**, da dobimo razpolovišče **N**. V točki **F** narišemo pravokotnico in nanjo nanesemo dolžino doljice **EF**. Iz razpolovišča **N** narišemo krožni lok skozi točko **M** do premice, ki je nosilka doljice **EF**, da dobimo presečišče **R**. Tako dobimo doljico **ER**, ki jo točka **F** deli v zlatem rezu.

### 1.9.3 Zlati trikotnik

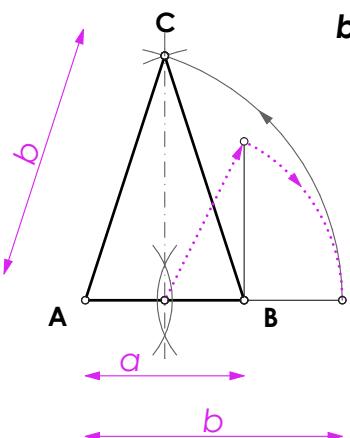
Zlati trikotnik je enakokraki trikotnik, v katerem sta dolžini kraka  $b$  in osnovnice  $a$  v razmerju zlatega reza (slika 1.9.3). Konstrukciji kraka  $b$  in osnovice  $a$  sta opisani pod točko 1.9.1 in 1.9.2.

V pravilnem petkotniku sta dolžina diagonale in dolžina stranice v razmerju zlatega reza. Stranica pravilnega petkotnika in njegovi diagonalni, ki izhajata iz oglišč stranice, tvorijo zlati trikotnik.

V pravilnem desetkotniku sta dolžina polmera očrtanega kroga in dolžina stranice v razmerju zlatega reza. Stranica pravilnega desetkotnika in polmera očrtanega kroga, ki izhajata iz oglišč stranice, tvorijo zlati trikotnik.

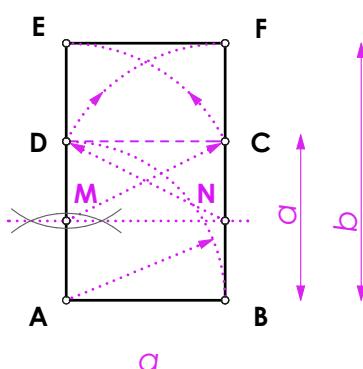
### 1.9.4 Zlati pravokotnik

V zlatem pravokotniku sta dolžini stranice  $b$  in stranice  $a$  v razmerju zlatega reza (slika 1.9.4). Po mnenju mnogih strokovnjakov je oblika zlatega pravokotnika »najlepša« med oblikami pravokotnikov. Konstrukciji stranice  $b$  in  $a$  sta opisani pod točko 1.9.1 in 1.9.2.



1.9.3 Zlati trikotnik

$$\begin{aligned} b : a &= \Phi : 1 \\ \Phi &= (1 + \sqrt{5})/2 \\ \Phi &\approx 1,618 \end{aligned}$$



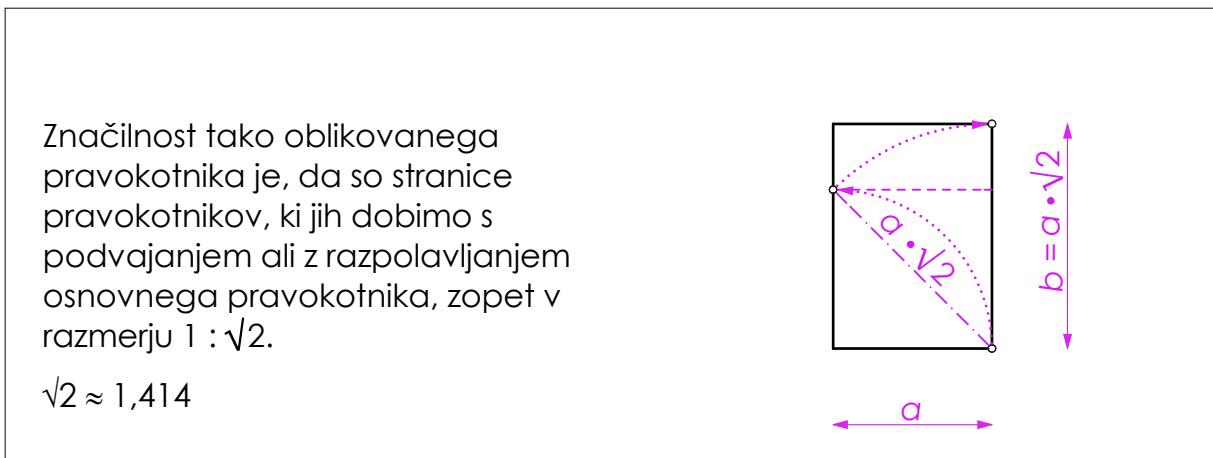
1.9.4 Zlati pravokotnik

Konstrukcija zlatega pravokotnika, če je znan kvadrat **ABCD**.

Razpolovimo stranici **AD** in **BC**, da dobimo središči **M** in **N**. Krožni lok s središčem v točki **M** in polmerom **MC** seka podaljšano stranico **AD** v točki **E**, krožni lok s središčem v točki **N** in polmerom **ND** pa seka podaljšano stranico **BC** v točki **F**. Dolžini stranic **AE** in **AD** sta v razmerju zlatega reza. Enako velja za razmerje dolžin stranic **BF** in **BC** (konstrukcija 1.9.2). Ker je dolžina stranice **AB** enaka dolžinama stranic **AD** in **BC**, velja pravilo, da sta v zlatem pravokotniku dolžini stranice **BF** (tukaj stranice  $b$ ) in stranice **AB** (tukaj stranice  $a$ ) v razmerju zlatega reza.

## 1.10 Formatiranje listov po DIN-u

Za formatiranje listov je dr. Porstmann (Nemčija) izbral obliko pravokotnika, v katerem sta stranici  $a$  in  $b$  v razmerju  $1 : \sqrt{2}$ .



Izhodiščna oblika lista v formatu **A** je po DIN-u pravokotnik s površino  $1 \text{ m}^2$ , kjer sta dolžini stranic v razmerju  $1 : \sqrt{2}$ .

$$\begin{aligned} a : b &= 1 : \sqrt{2} \\ a \cdot b &= 1 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dolžina stranice } a &= 0,841 \text{ m} \\ \text{dolžina stranice } b &= 1,189 \text{ m} \end{aligned}$$

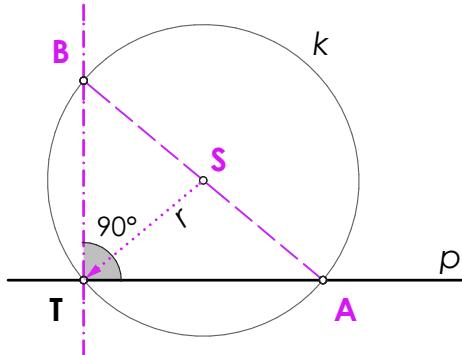
### Formati listov po DIN-u

Ti normativi veljajo tudi v naši državi.

Format Razred	Format A mm	Format B mm
0	841 x 1189	1000 x 1414
1	594 x 841	707 x 1000
2	420 x 594	500 x 707
3	297 x 420	353 x 500
4	210 x 297	250 x 353
5	148 x 210	176 x 250
6	105 x 148	125 x 176
7	74 x 105	88 x 125
8	52 x 74	62 x 88
9	37 x 52	44 x 62
10	26 x 37	31 x 44
11	18 x 26	22 x 31
12	13 x 18	15 x 22

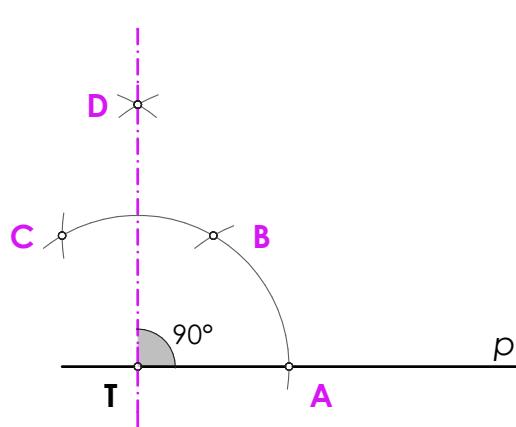
DIN ... »Deutsche Industrie Norm« – nemške norme v industriji

### 1.11.1 Pravokotnica na premico v dani točki na premici – 1. način



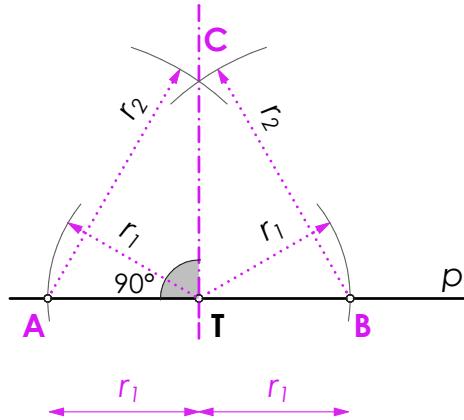
Dana je točka **T** na premici **p**. Zunaj premice **p** izberemo poljubno točko **S**. Narišemo krožnico **k** skozi točko **T** in s središčem v točki **S**, tako da seka dano premico **p** v točki **A**. Skozi točki **A** in **S** narišemo premer **AB**, ki seka krožnico **k** v točki **B**. Premica, ki jo narišemo skozi točko **T** in presečišče **B**, je pravokotna na premico **p**.

### 1.11.2 Pravokotnica na premico v dani točki na premici – 2. način



Dana je točka **T** na premici **p**. Iz dane točke **T** na premici **p** narišemo krožni lok s poljubnim polmerom **r**, da dobimo na premici točko **A**. Na ta lok nanesemo iz točke **A** krožni lok z istim polmerom **r** dvakrat zapored, da dobimo točki **B** in **C**. Iz točk **B** in **C** narišemo krožna loka z istim polmerom **r**, da dobimo presečišče **D**. Premica, ki jo narišemo skozi točki **T** in **D**, je pravokotna na premico **p**.

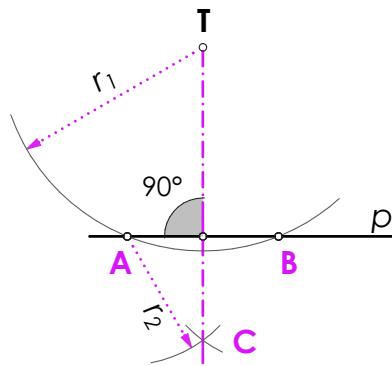
### 1.11.3 Pravokotnica na premico v dani točki na premici – 3. način



Dana je točka **T** na premici **p**. Iz dane točke **T** na premici **p** s šestilom narišemo točki **A** in **B**, tako da je dolžina daljice **AT** enaka dolžini daljice **TB**. Iz točk **A** in **B** narišemo krožna loka s polmerom  $r_2$ , ki je večji od polovice dolžine daljice **AB**. Oba krožna loka se sekata v točki **C**.

Premica, ki jo narišemo skozi točki **T** in **C**, je pravokotna na premico **p**.

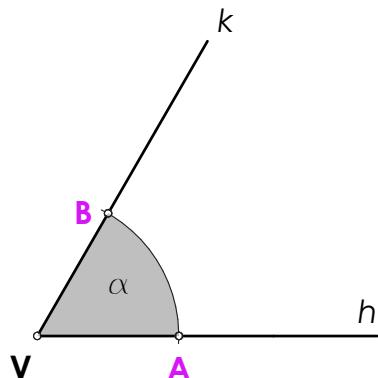
### 1.12 Pravokotnica na premico skozi dano zunanjtočko



Dana točka **T** leži zunaj dane premice **p**. Iz zunanje točke **T** narišemo krožni lok s poljubnim polmerom  $r_1$ , ki je dovolj velik, da seka premico **p** v dveh točkah (tukaj v točkah **A** in **B**). Nato iz točk **A** in **B** narišemo krožna loka s polmerom  $r_2$ , ki je večji od polovice dolžine daljice **AB**. Krožna loka se sekata v točki **C**.

Premica, ki jo narišemo skozi točki **T** in **C**, je pravokotna na premico **p**.

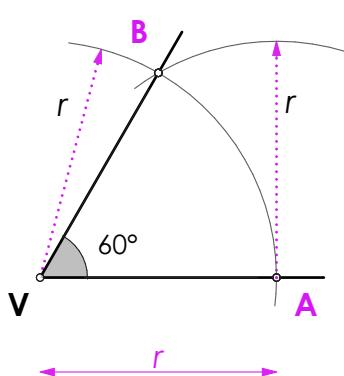
### 1.13 Kot



Kot je množica točk v ravni, ki je omejena z dvema poltrakoma s skupnim izhodiščem. Skupno točko imenujemo vrh kota, poltraka pa sta njegova kraka.

- V** ..... vrh kota
- h, k** ..... kraka kota
- $\alpha, \beta$  ..... označba kota z grško črko
- kot  $\alpha$ , kot **AVB**, kot  $(h, k)$  ..... opis kota

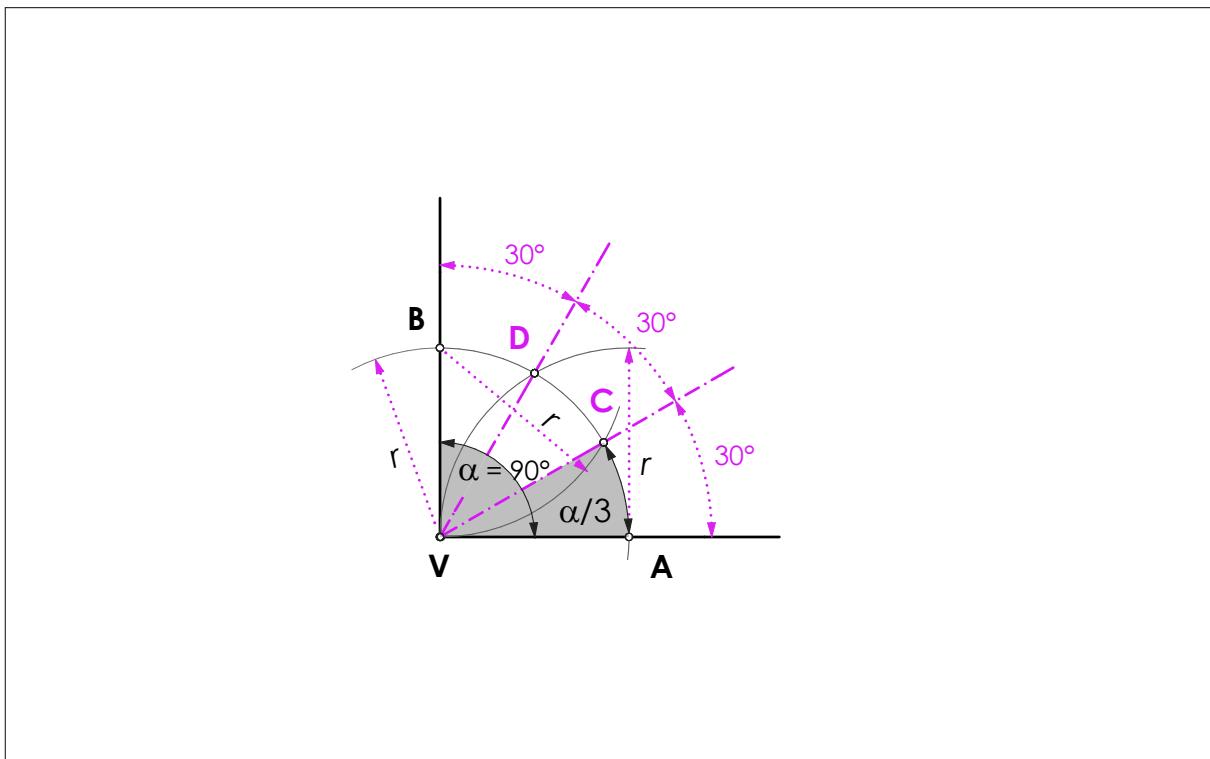
### 1.14 Načrtovanje kota $60^\circ$



Narišemo poltrak z vrhom v točki **V**, ki je že vrh kota. Iz vrha **V** narišemo krožni lok s poljubnim polmerom  $r$ , da dobimo na poltraku presečišče **A**. Iz točke **A** narišemo krožni lok s polmerom  $r$ , ki je enak dolžini daljice **VA** in seka prvi krožni lok v točki **B**. Kot **AVB** meri  $60^\circ$ .

Trikotnik **AVB** je enakostraničen, zato so njegovi notranji koti enaki in merijo po  $60^\circ$ .

### 1.15 Delitev pravega kota na tretjine

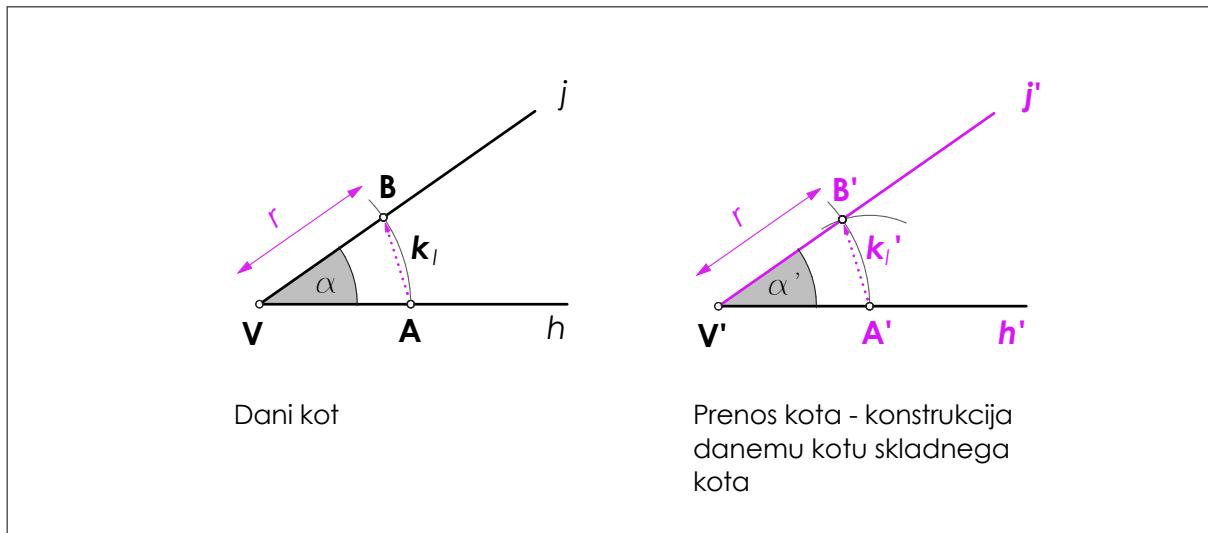


Dan je pravi kot  $\alpha$ .

V pravem kotu iz vrha **V** narišemo krožni lok s poljubnim polmerom  $r$ , ki seka kraka kota v točkah **A** in **B**. Nato iz presečišč **A** in **B** narišemo krožna loka z istim polmerom  $r$ . Ta krožna loka sekata prvi krožni lok v točkah **C** in **D**.

Poltraka, ki ju narišemo iz vrha **V** skozi presečišči **C** in **D**, delita pravi kot na trejline.

### 1.16 Prenos kota – risanje danemu kotu skladnega kota



Dan je kot  $\alpha$ , ki ga omejujeta kraka  $h$  in  $j$ .

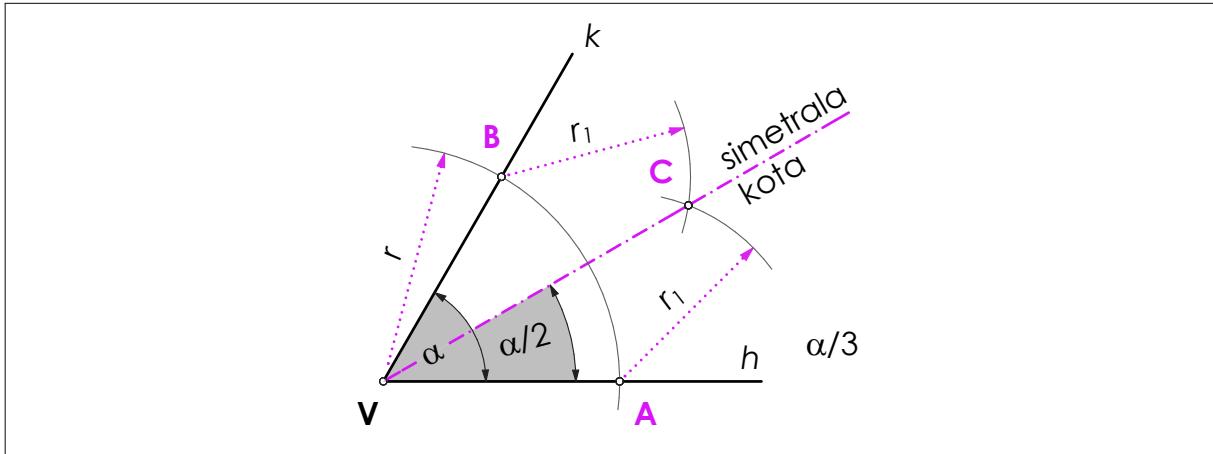
Narišemo poltrak  $h'$  z vrhom  $V'$ , kamor prenašamo kot  $\alpha$ . V danem kotu  $\alpha$  iz vrha  $V$  narišemo krožni lok  $k_l$  s polmerom primerne dolžine  $r$ . Ta krožni lok seka kraka kota v točkah  $A$  in  $B$ . Krožni lok  $k_l'$  z istim polmerom  $r$  narišemo tudi iz točke  $V'$  na poltraku  $h'$ , da dobimo presečišče  $A'$ . Nato v danem kotu  $\alpha$  krožnemu loku  $k_l$  odmerimo s šestilom pripadajočo dolžino tetive  $AB$  in jo prenesemo na krožni lok  $k_l'$  z začetkom v točki  $A'$ . Tako dobimo točko  $B'$ . Zatem iz vrha  $V'$  skozi točko  $B'$  narišemo poltrak, ki je nosilec kraka  $j'$ . Kraka  $h'$  in  $j'$  omejujeta kot  $\alpha'$ . S tem postopkom je krožni lok  $A'B'$  enak krožnemu loku  $AB$ , zato je tudi kot  $\alpha'$  skladen z danim kotom  $\alpha$ .

### 1.17 Delitev kota na enake dele

V naslednjih primerih bomo obravnavali dva načina delitve kotov na enake dele. Pri reševanju nalog izberemo tisti način, ki v nalogi najbolj ustreza.

1. način: Kotne simetrale dobimo s povezovanjem vrha kota s presečišči ustreznih krožnih lokov (konstrukciji 1.18 in 1.19).
2. način: Kotne simetrale dobimo s povezovanjem vrha kota s presečišči ustreznih daljic (konstrukciji 1.20 in 1.21).

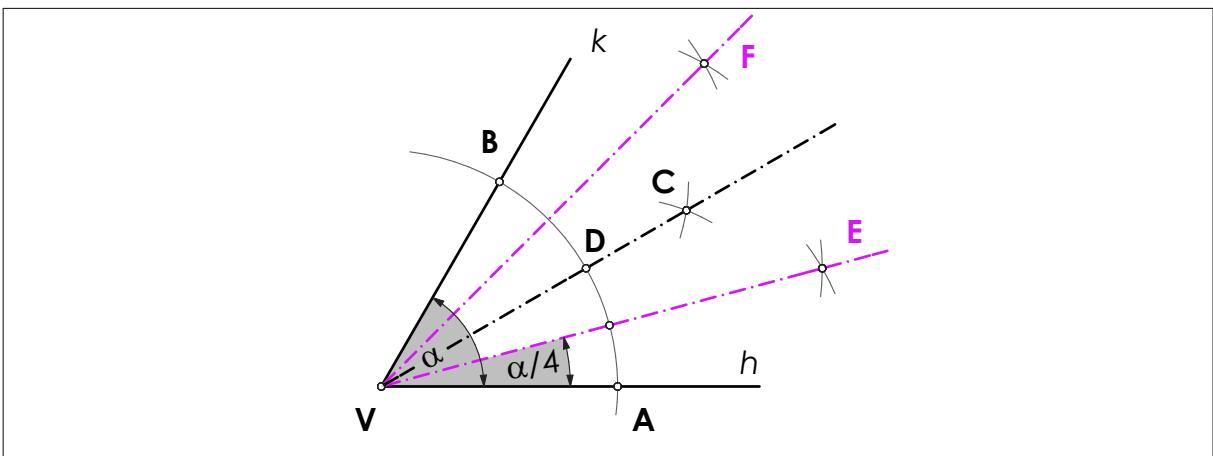
### 1.18 Simetrala kota – 1. način



Dan je kot  $\alpha$ .

Iz vrha kota  $\alpha$  narišemo krožni lok s poljubnim polmerom  $r$ . Krožni kot seka kraka kota v točkah **A** in **B**. Iz točk **A** in **B** narišemo krožna loka z istim polmerom  $r_1$ , ki je dovolj velik, da se krožna loka sekata. Njuno presečišče je v točki **C**. Poltrak, ki ga narišemo iz vrha **V** skozi točko **C**, je simetrala kota  $\alpha$  in deli kot na dva enaka dela.

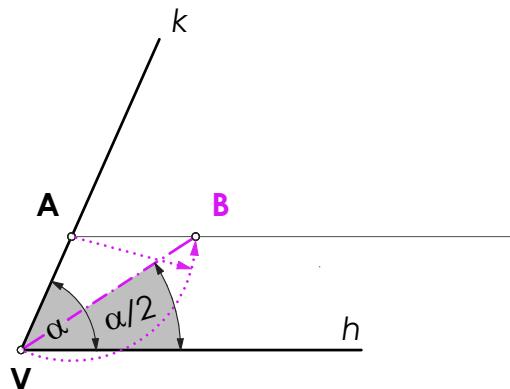
### 1.19 Delitev kota na 4, 8, 16 ... enakih delov – 1. način



Dan je kot  $\alpha$ .

Narišemo simetralo kota  $\alpha$  in na njej odmerimo dolžino **VD**, ki je enaka dolžinama **VA** in **VB**. Nato narišemo simetrali kota **AVD** in kota **DVB**. Simetrale, ki so narisane iz vrha **V** kota  $\alpha$  skozi točke **E**, **C** in **F**, delijo kota  $\alpha$  na štiri enake dele. Če postopek ponavljamo, razdelimo dani kota  $\alpha$  na 8, 16 ... enakih delov.

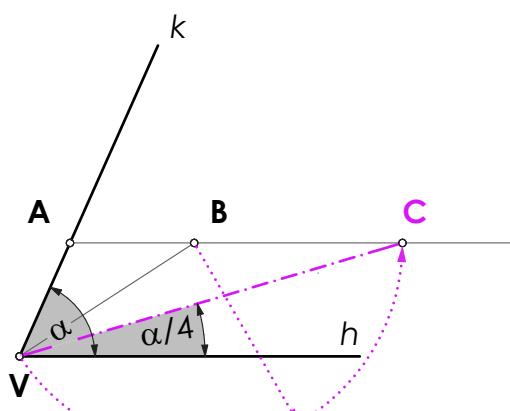
### 1.20 Simetrala kota – 2. način



Dan je kot  $\alpha$ .

Na enem kraku kota  $\alpha$  izberemo poljubno točko **A** in narišemo skozi vzporednico drugemu kraku. Na vzporednico nanesemo razdaljo **AB**, ki je enaka razdalji **VA**. Zveznica točk **V** in **B** je simetrala kota  $\alpha$ .

### 1.21 Določitev četrtnine, osmine, šestnajstine ... danega kota – 2. način

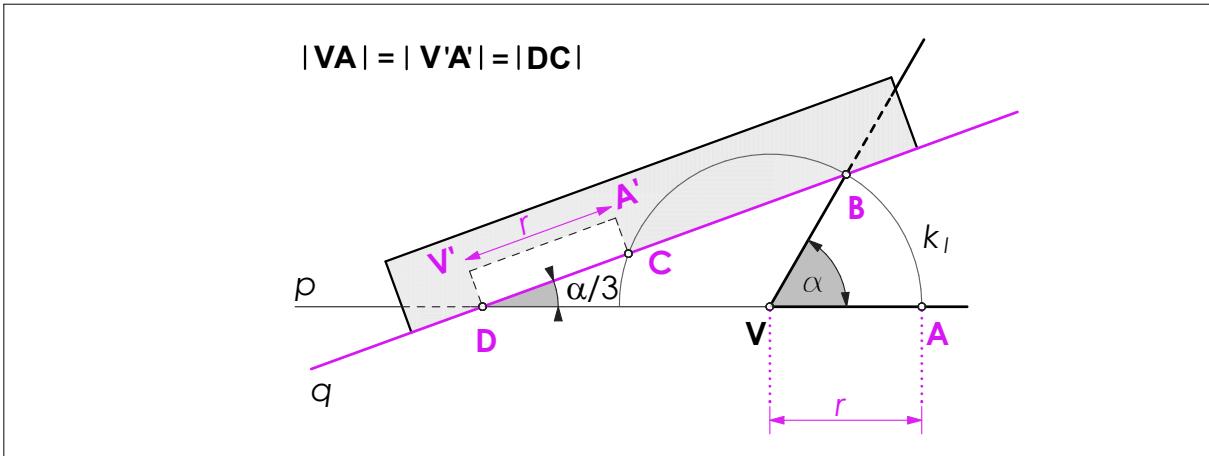


Dan je kot  $\alpha$ .

Narišemo simetralo kota  $\alpha$  po prejšnjem postopku in nanesemo na vzporednico od točke **B** dalje razdaljo **BC**, ki je enaka razdalji **VB**. Zveznica točk **V** in **C** ter krak **h** oklepata kot, ki je enak četrtini kota  $\alpha$ .

Če postopek ponavljamo, dobimo osmino, šestnajstino ... kota  $\alpha$ .

### 1.22 Delitev kota na tretjine s papirnim trakom



Dan je kot  $\alpha$ .

Iz vrha  $V$  kota  $\alpha$  narišemo krožni lok  $k_1$  s poljubnim polmerom  $r$ , da dobimo presečišči  $A$  in  $B$  s krakoma danega kota  $\alpha$ . Krak skozi točki  $V$  in  $A$  podaljšamo s premico  $p$ . Na ravnom robu papirnega traku (ali ravnila) označimo krajišči polmera  $r$ , ki je enak dolžini  $VA$ , s točkama  $V'$  in  $A'$ . Nato položimo papirni trak na risbo tako, da poteka rob papirja skozi točko  $B$ , hkrati pa se točka  $A'$  dotika krožnega loka  $k_1$  v presečišču  $C$ , točka  $V'$  pa se dotika premice  $p$  v presečišču  $D$ . V tem primeru je razdalja  $DC$  enaka dolžini daljice  $VA$ . Skozi točki  $C$  in  $D$  narišemo premico  $q$ . Notranji kot  $VDB$  z vrhom v točki  $D$ , ki ga oklepata premici  $p$  in  $q$ , je enak tretjini danega kota  $\alpha$ .

*Opomba: To konstrukcijo lahko narišemo z ravnilom in s šestilom s uporabo papirnega traku (ali ravnila).*

### 1.23 Metode za delitev kota na poljubno število enakih delov

Delitev kota na sodo število enakih delov s pomočjo šestila in ravnila:

Če delimo kot na sodo število enakih delov, lahko uporabljamo 1. način (konstrukciji 1.18 in 1.19) ali 2. način (konstrukciji 1.20 in 1.21) delitve kota na enake dele. Primernejša je uporaba 1. načina, ker je potrebnih manj delovnih operacij.

Delitev kota na liho število enakih delov s pomočjo šestila in ravnila:

Kadar ima dani kot takšne dimenzijske, da ga s šestilom in z ravnilom ne moremo razdeliti natanko na liho število enakih delov, uporabljamo približne konstrukcije, ki nam dajo risarsko dovolj natančne rezultate.

V obravnavanih konstrukcijah upoštevamo, da je dolžina loka vsakega kota v premem razmerju s pripadajočim polmerom.

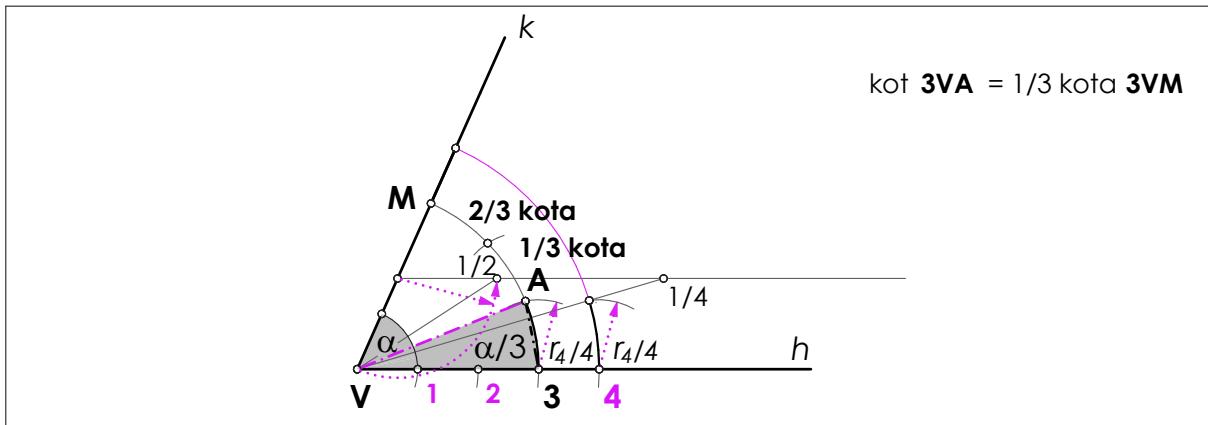
Pri opisanih konstrukcijah sta ločeni konstrukciji delitve ostrega in topega kota na liho število enakih delov.

## 1.24 Približna konstrukcija delitve ostrega kota na liho število enakih delov

To metodo uporabljamo za delitev ostrega kota na poljubno liho število enakih delov.

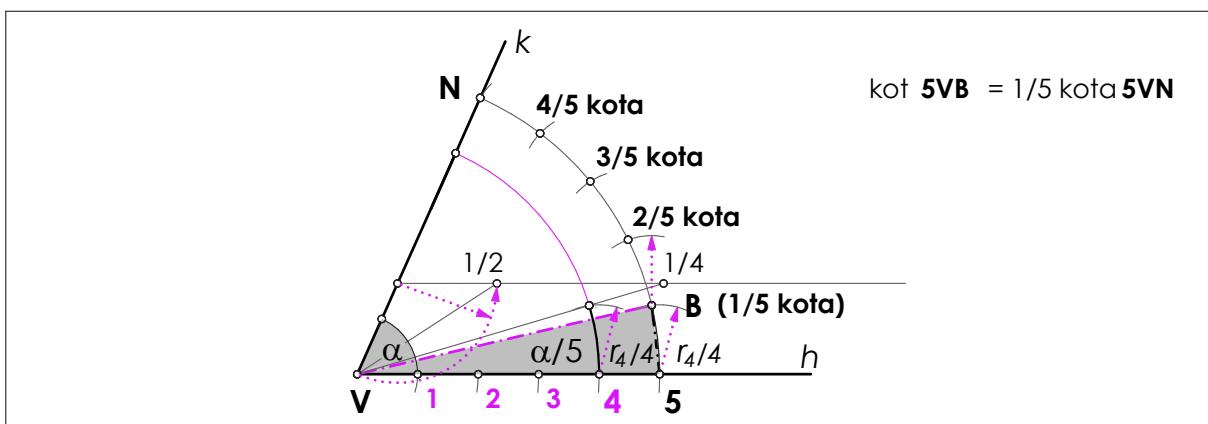
Na en krak danega kota nanesemo toliko enot (vključno s krožnim lokom 4) primerne dolžine, na kolikor delov želimo razdeliti kot. Krožne loke označimo po prikazani shemi. Pri delitvi ostrega kota na krožnem loku s polmerom 4 določimo pripadajočo tetivo četrtine krožnega loka 4.

### 1.24.1 Delitev ostrega kota na 3 enake dele



Delitev danega ostrega kota na tretjine: Tetivo četrtine krožnega loka 4 nanesemo na krožni lok 3, da dobimo velikost krožnega loka **3A**, ki risarsko ustreza tretjini krožnega loka **3M**. Če želimo razdeliti dani kot na 3 enake dele, nanašamo tetivo, ki je enaka dolžini daljice **3A**, na krožni lok **3M**.

### 1.24.2 Delitev ostrega kota na 5 enakih delov



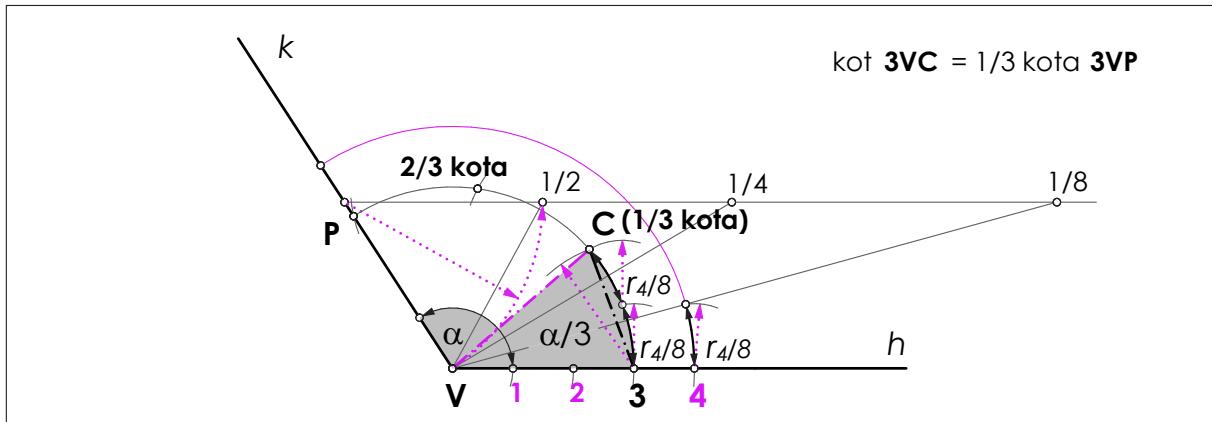
Delitev danega ostrega kota na petine: Tetivo četrtine krožnega loka 4 nanesemo na krožni lok 5, da dobimo velikost krožnega loka **5B**, ki risarsko ustreza petini krožnega loka **5N**. Če želimo razdeliti dani kot na 5 enakih delov, nanašamo tetivo, ki je enaka dolžini daljice **5B**, na krožni lok **5N**.

## 1.25 Približna konstrukcija delitve topega kota na liho število enakih delov

To metodo uporabljamo za delitev topega kota na poljubno liho število enakih delov.

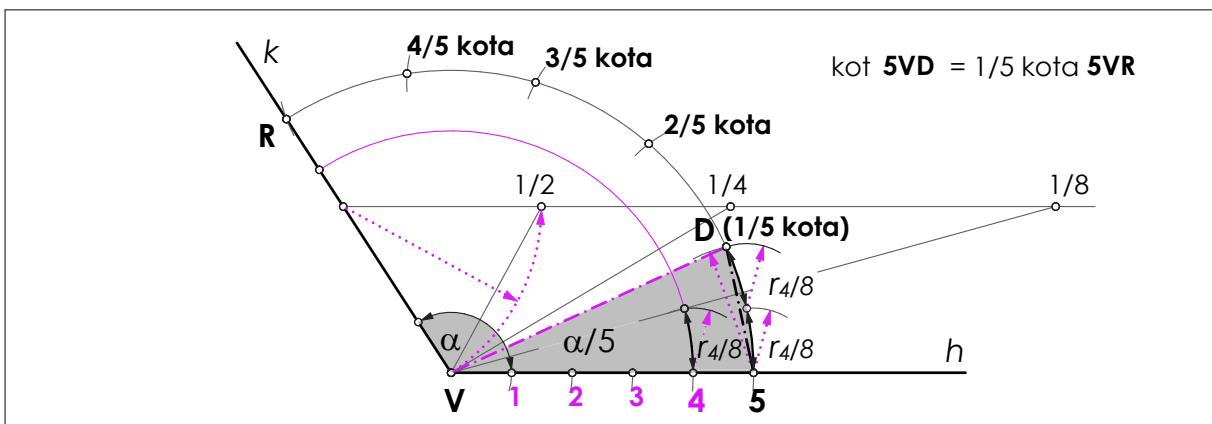
Na en krak danega kota nanesemo toliko enakih enot (vključno s krožnim lokom **4**) primerne dolžine, na kolikor delov želimo razdeliti kot. Krožne loke označimo po prikazani shemi. Pri delitvi topega kota *krožnemu loku s polmerom **4** določimo pripadajočo tetivo osmine krožnega loka **4**.*

### 1.25.1 Delitev topega kota na 3 enake dele



Delitev danega topega kota na tretjine: *Tetivo osmine krožnega loka **4** dva-krat nanesemo na krožni lok **3**, da dobimo velikost krožnega loka **3C**, ki risarsko ustreza tretjini krožnega loka **3P**. Če želimo razdeliti dani kot na 3 enake dele, nanašamo tetivo, ki je enaka dolžini daljice **3C**, na krožni lok **3P**.*

### 1.25.2 Delitev topega kota na 5 enakih delov



Delitev danega topega kota na petine: *Tetivo osmine krožnega loka **4** dva-krat nanesemo na krožni lok **5**, da dobimo velikost krožnega loka **5D**, ki risarsko ustreza petini krožnega loka **5R**. Če želimo razdeliti dani kot na 5 enakih delov, nanašamo tetivo, ki je enaka dolžini daljice **5D**, na krožni lok **5R**.*

## 2 KROG, KROŽNICA IN KROŽNI LOK

### 2.1 Krog, krožnica in krožni lok

Krožnica je množica točk v ravnini, ki so za razdaljo  $r$  oddaljene od izbrane središčne točke  $S$ . Krožnica omejuje krožno ploskev, ki jo imenujemo *krog*.

*Krog ali disk* je del ravnine, ki ga krožnica omejuje. Krog je tudi množica vseh tistih točk v ravnini, katerih razdalja od središča je največ  $r$ .

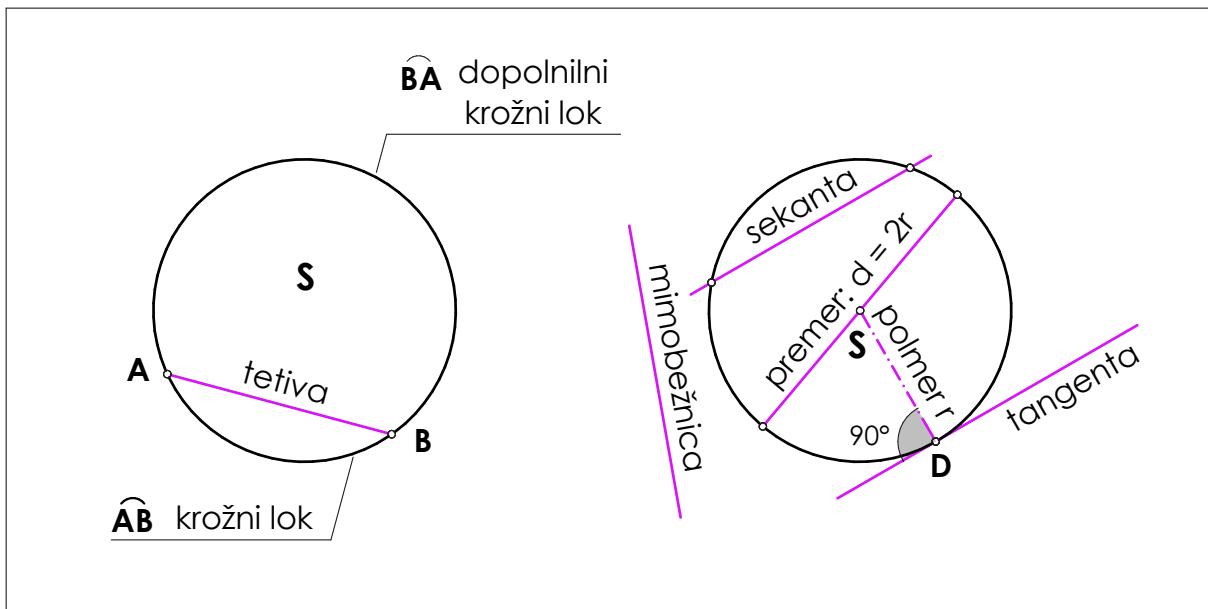
*Krožni lok* je del krožnice med dvema različnima točkama na krožnici.

$S$  ..... središče ali center

$r$  ..... polmer ali radij

$d = 2r$  ..... premer ali diameter

### 2.2 Elementi kroga



Tetiva je daljica, ki povezuje dve različni točki na krožnici.

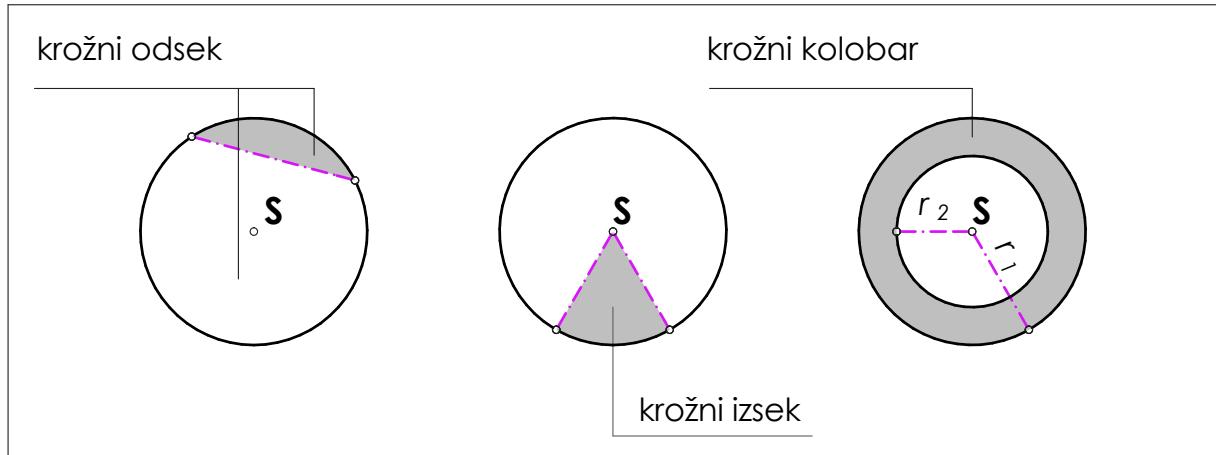
Premer ali diameter je najdaljša tetiva, ki poteka skozi središče krožnice.

Sečnica ali sekanta je premica, ki seka krožnico v dveh točkah. Sekanta deli krog na dva dela.

Dotikalnica ali tangenta je premica, ki se dotika krožnice v eni točki.

Mimobežnica ali pasanta je premica, ki s krožnico nima nobene skupne točke.

### 2.3 Deli kroga

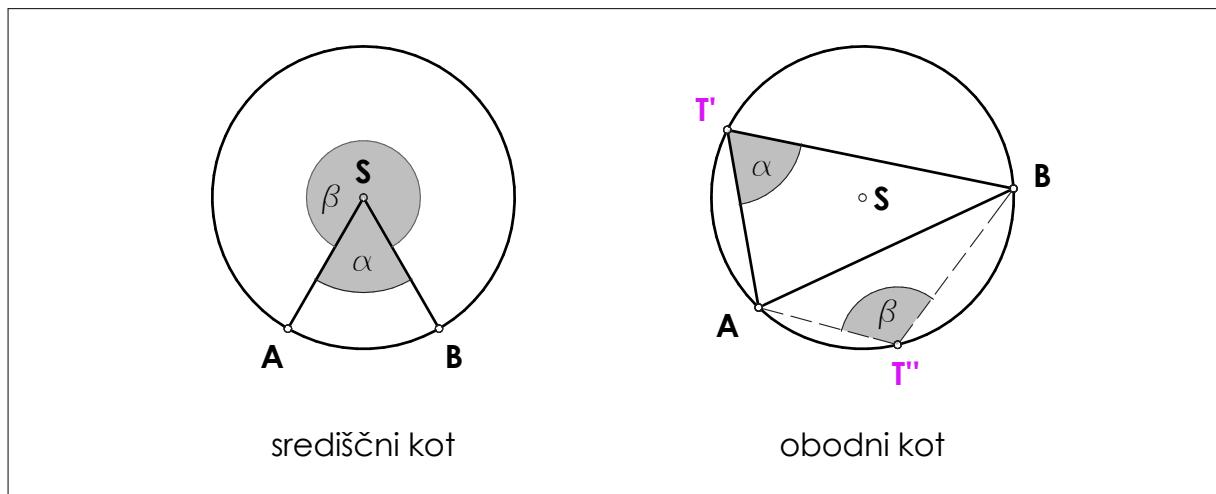


*Krožni odsek ali krožni segment* je del kroga med krožnim lokom in tetivo.

*Krožni izsek ali krožni sektor* je del kroga med krožnim lokom in dvema polmeroma.

*Krožni kolobar* je področje med dvema istosrediščnima krožnicama z različnimi polmeroma.

### 2.4 Središčni in obodni kot

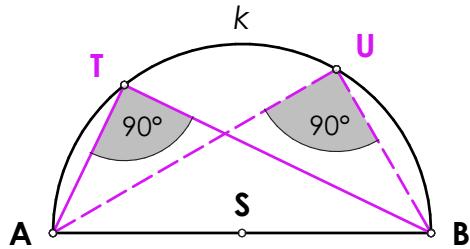


*Središčni kot* je kot v krogu, ki ima vrh v središču krožnice, za kraka pa dva polmera iz tega središča. Nastala kraka oklepata dva središčna kota, ki se dopolnjujeta do polnega kota ( $\alpha + \beta = 360^\circ$ ).

*Obodni kot* je kot v krogu, ki ima vrh v točki na krožnici, za kraka pa tetivi iz te točke. Dani tetivi krožnice lahko vedno priredimo obodna kota  $\alpha$  in  $\beta$ , katerih vrha ležita na različnih straneh iste tetive na nasprotnih krožnih lokih. Vsota obeh obodnih kotov je enaka  $180^\circ$ .

*Obodni kot* je enak polovici pripadajočega središčnega kota.

## 2.5 Kot v polkrogu, Talesov izrek

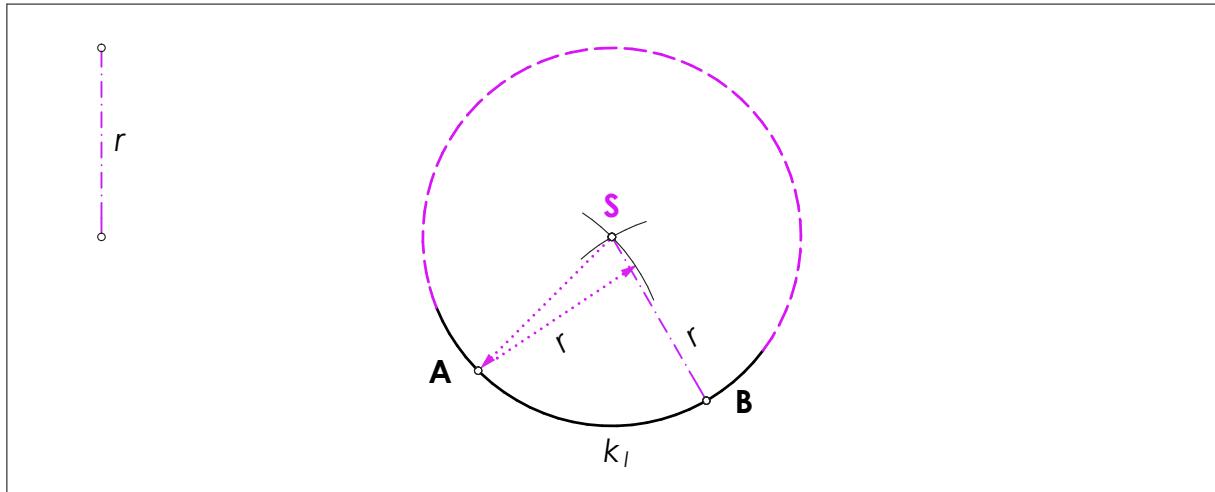


*Kot v polkrogu* je kot, ki ima vrh na krožnici, njegova kraka pa potekata skozi krajišči premera te krožnice. Kot v polkrogu meri  $90^\circ$ . Pripadajoči središčni kot meri  $180^\circ$ .

*Talesov izrek:* Obodni kot, katerega krožni lok je polovica krožnice, je pravi kot.

Iz tega sledi: Vsak trikotnik, katerega osnovica je premer krožnice **k**, tretje oglišče trikotnika pa leži na krožnici **k**, je pravokoten.

## 2.6 Risanje krožnega loka z danim polmerom skozi dani točki

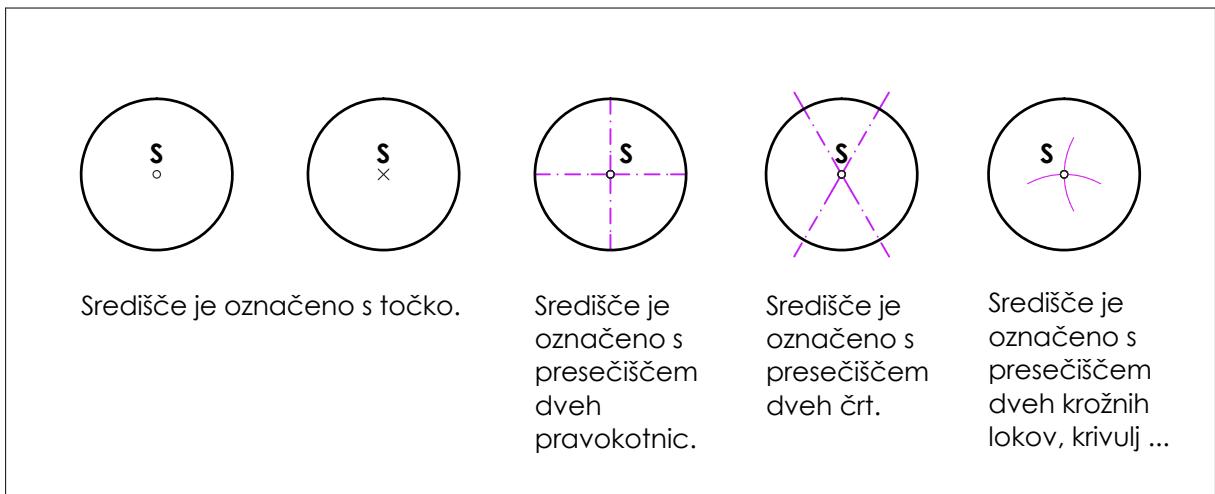


Krožni lok  $k_1$  z danim polmerom  $r$  poteka skozi dani točki **A** in **B**.

Iz točk **A** in **B** narišemo krožna loka s polmerom  $r$ . Presečišče krožnih lokov je središče **S** iskanega krožnega loka  $k_1$ . Sedaj narišemo krožni lok  $k_1$  z istim polmerom  $r$  in s središčem v točki **S** skozi dani točki **A** in **B**.

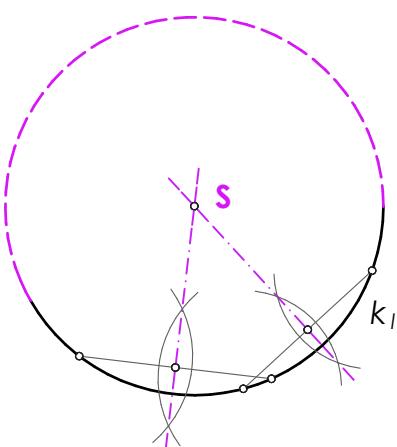
Opisano konstrukcijo uporabljamo tudi za risanje krožnice z danim polmerom skozi dani točki **A** in **B**.

### 2.6.1 Označevanje središča kroga in krožnega loka



V risbi moramo pred risanjem kroga ali krožnega loka *središče označiti*, sicer ga bomo kasneje zaman iskali.

## 2.7 Določanje središča danega krožnega loka

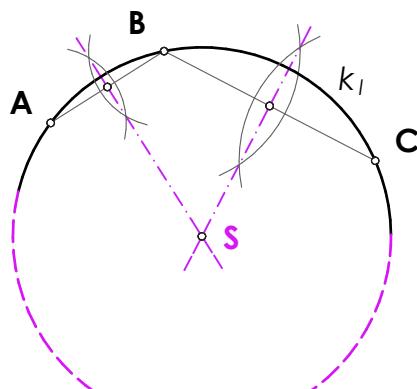


Dan je krožni lok  $k_i$ .

Narišemo dve poljubni tetivi krožnega loka  $k_i$  in njuni simetrali. Presečišče simetral je iskano središče  $S$  krožnega loka  $k_i$ .

Opisano konstrukcijo uporabljamo tudi za določanje središča dane krožnice.

## 2.8 Risanje krožnega loka skozi tri dane točke

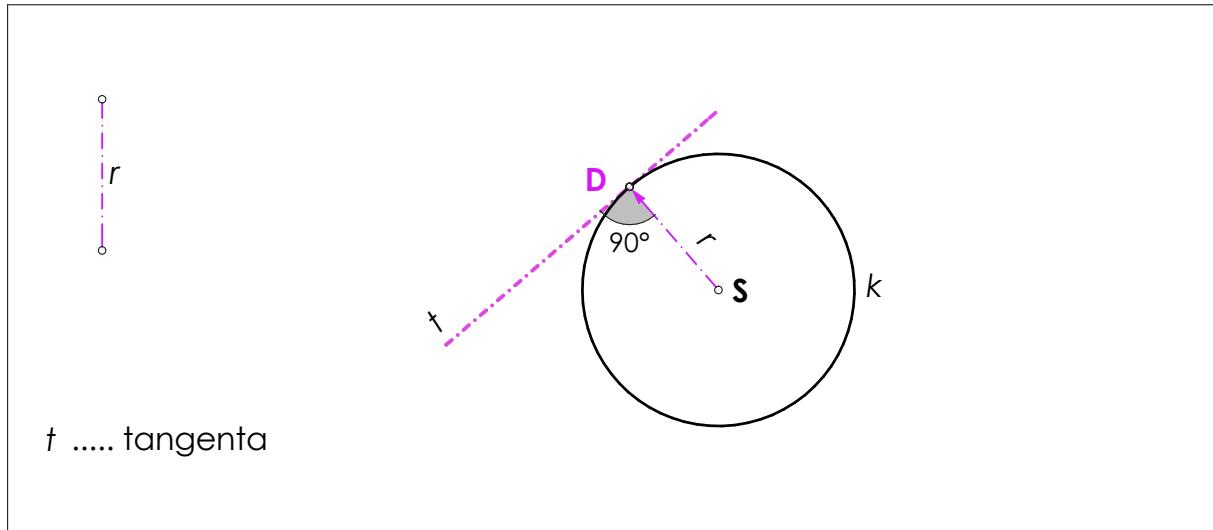


Krožni lok  $k_i$  poteka skozi dane točke  $A$ ,  $B$  in  $C$ .

Točke povežemo med seboj z dvema tetivama, ki ju razpolovimo s simetralama. Presečišče simetral je iskano središče  $S$  krožnega loka. Iz tako dobljenega središča narišemo krožni lok  $k_i$  skozi dane točke  $A$ ,  $B$  in  $C$ .

Opisano konstrukcijo uporabljamo tudi za risanje krožnice skozi dane točke  $A$ ,  $B$  in  $C$ .

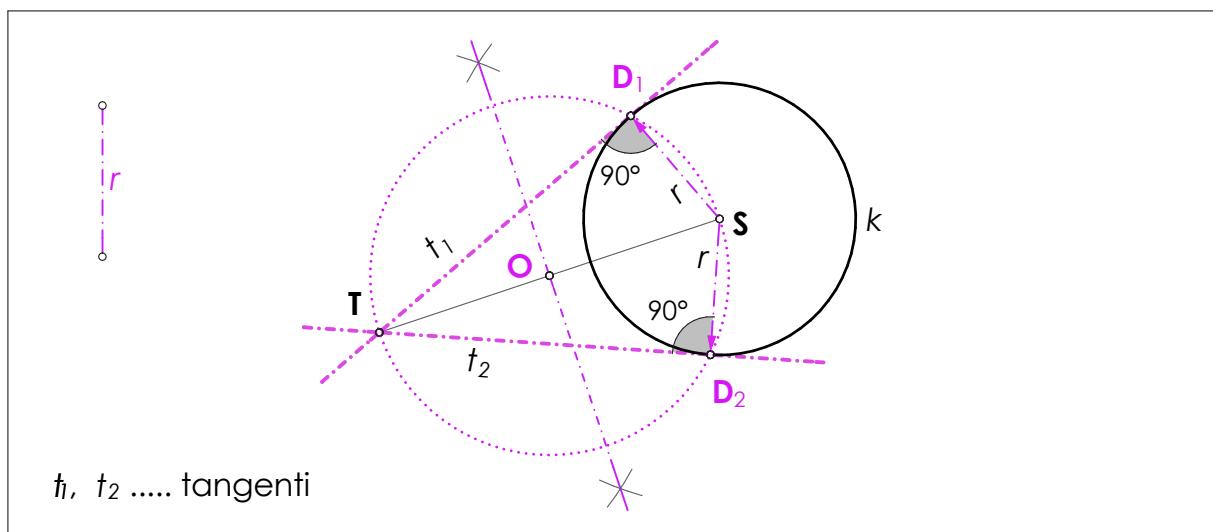
## 2.9 Tangenta na krožnico v dani točki krožnice



Dana točka **D** je na dani krožnici **k** z znanim polmerom **r**.

Tangenta v dani točki **D** krožnice **k** je premica, pravokotna na polmer **r**, ki povezuje dotikališče **D** na krožnici s središčem **S** krožnice **k**.

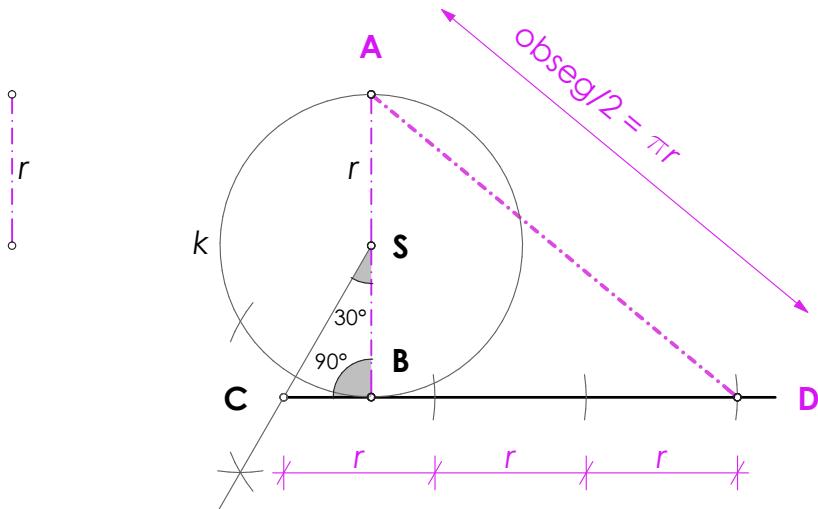
## 2.10 Tangenti na krožnico iz dane zunanje točke



Dani sta krožnica **k** z znanim polmerom **r** in točka **T** zunaj krožnice **k**.

Povežemo točko **T** zunaj krožnice **k** s središčem **S**. Razpolovimo daljico **ST**, da dobimo središče **O**. Narišemo Talesovo krožnico skozi točki **T** in **S** in s središčem v točki **O**, da dobimo presečišči **D<sub>1</sub>** in **D<sub>2</sub>** s krožnico **k**. Točki **D<sub>1</sub>** in **D<sub>2</sub>** na krožnici **k** sta iskani dotikališči obeh tangent. Premici, narisani skozi zunanjo točko **T** ter skozi dotikališči **D<sub>1</sub>** in **D<sub>2</sub>**, sta iskani tangentni **t<sub>1</sub>** in **t<sub>2</sub>**.

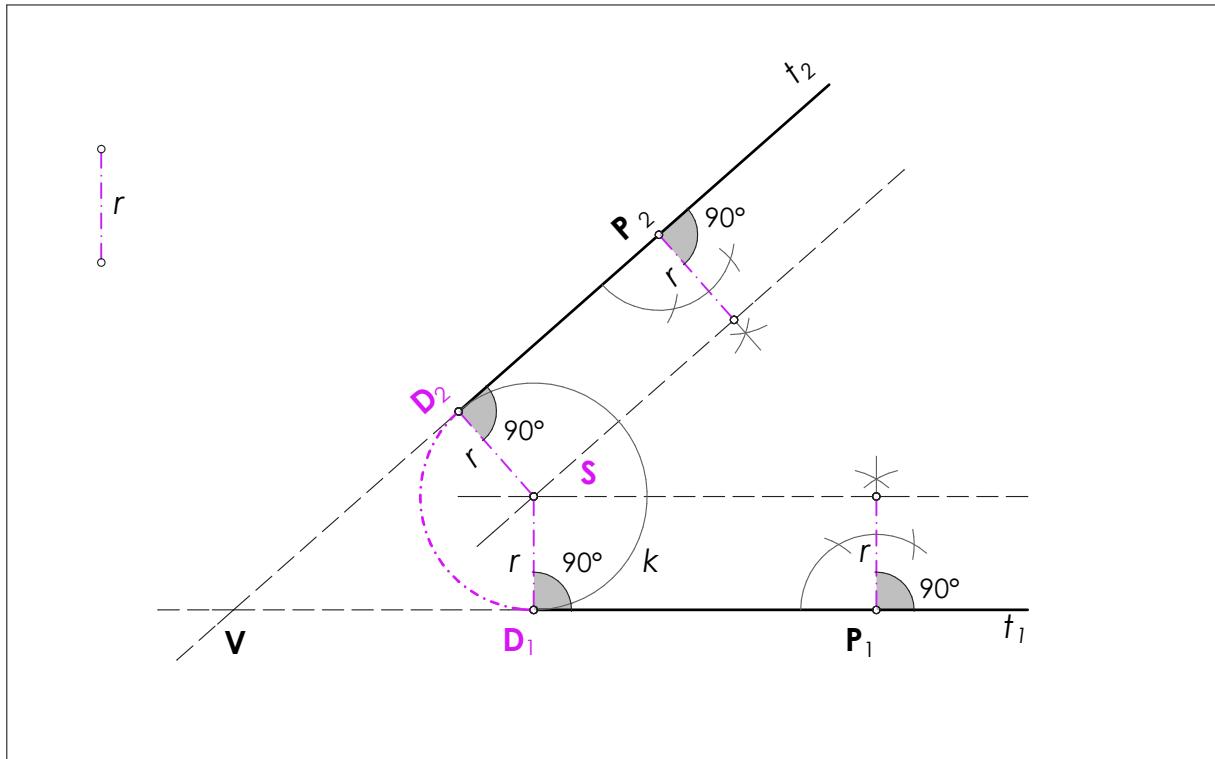
## 2.11 Zravnjanje polovice krožnice z danim polmerom (A. Kochansky)



Dana je krožnica  $k$  s polmerom  $r$ .

Narišemo premer  $AB$  krožnice  $k$ . V točki  $B$  narišemo tangento na krožnico. Iz središča  $S$  nanesemo ob premeru  $AB$  drugi krak središčnega kota  $30^\circ$ , ki seka tangento v točki  $C$ . Na tangento nanesemo iz točke  $C$  trikratno dolžino polmera  $r$ . Dolžina hipotenuze  $AD$  v trikotniku  $ABD$  je enaka polovici krožnega obsega, določenega na pet decimalnih mest natančno.

## 2.12 Določanje središča in dotikališč dane krožnice z danima tangentama



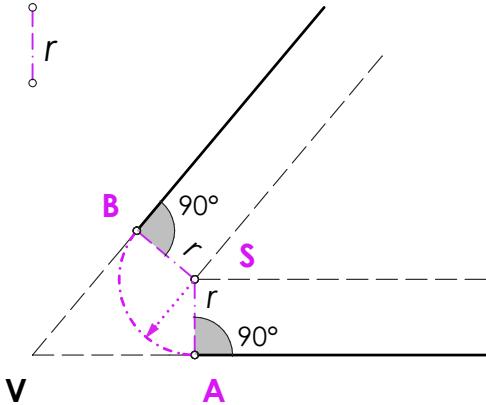
Dani sta tangentni  $t_1$  in  $t_2$  ter polmer  $r$  včrtane krožnice  $k$ .

Na tangentni  $t_1$  in  $t_2$  narišemo v poljubnih točkah pravokotnici v notranjost kota, ki ga oklepata tangentni. Na pravokotnicah odmerimo polmer  $r$  in narišemo vzporednici danima tangentama. V presečišču vzporednic je iskano središče  $S$  krožnice  $k$ . Dotikališči krožnice  $k$  s tangentama dobimo tako, da narišemo pravokotnici iz središča  $S$  na tangentni. Presečišči  $D_1$  in  $D_2$  na krožnici  $k$  sta dotikališči tangent  $t_1$  in  $t_2$ .

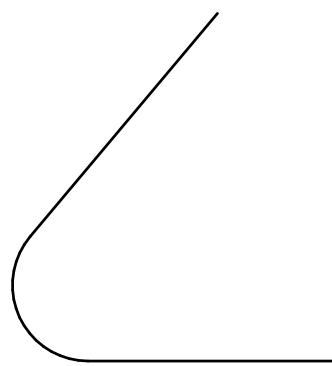
**Opomba:**

To konstrukcijo uporabljamo za risanje včrtanih krožnih lokov z danim polmerom ostriem in topim kotom. Na ta način dobimo krožne prehode v »ogliščih« ostrih in topih kotov (slike 2.13 in 2.14).

### 2.13 Krožni prehod v ostrem kotu



Slika 1: Načrtovanje

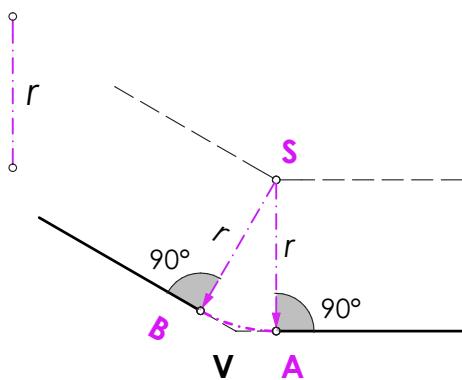


Slika 2: Krožni prehod v ostrem kotu

Dana sta ostri kot z vrhom v točki **V** in krožni lok s polmerom  $r$ .

Krožni prehod v ostrem kotu narišemo na osnovi opisa konstrukcije 2.12.

### 2.14 Krožni prehod v topem kotu



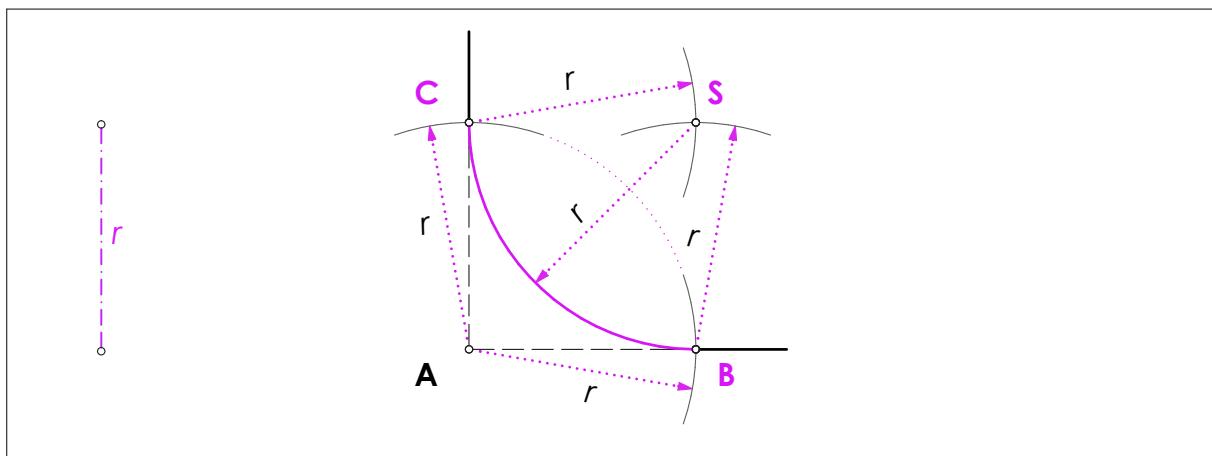
Slika 1: Načrtovanje

Slika 2: Krožni prehod v topem kotu

Dana sta topi kot z vrhom v točki **V** in krožni lok s polmerom  $r$ .

Krožni prehod v topem kotu narišemo na osnovi opisa konstrukcije 2.12.

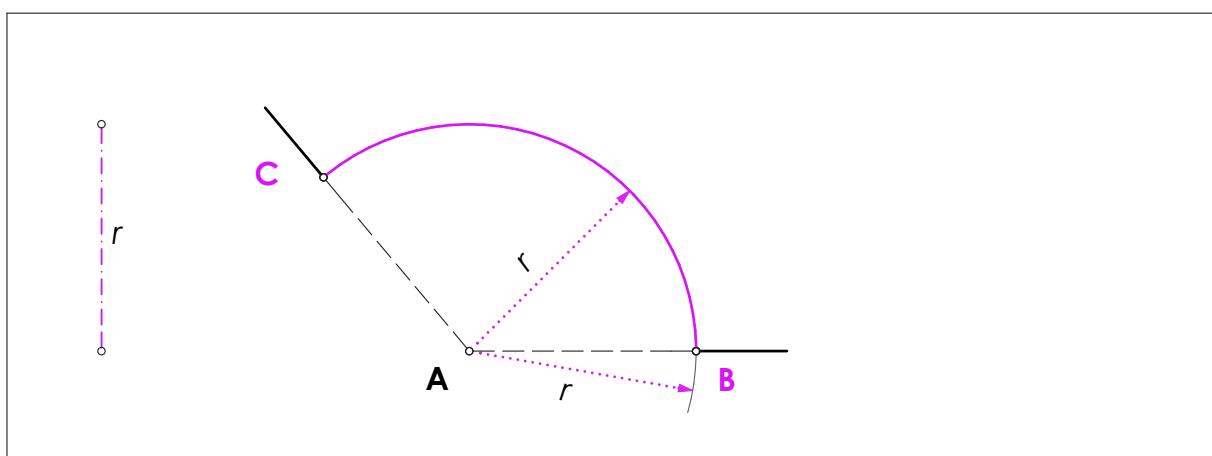
## 2.15 Izbočeni krožni prehod v pravem kotu



Dan je polmer  $r$  krožnega loka izbočenega krožnega prehoda v pravem kotu z vrhom v točki **A**.

Iz vrha **A** narišemo krožna loka s polmerom  $r$ , ki sekata kraka kota v točkah **B** in **C**. Iz presečišč **B** in **C** narišemo krožna loka z istim polmerom  $r$ , ki se sekata v središču **S**. Skozi točki **B** in **C** in s središčem v točki **S** narišemo krožni lok z istim polmerom  $r$ . Ta krožni lok tvori krožni prehod med krakoma pravega kota ob vrhu **A**.

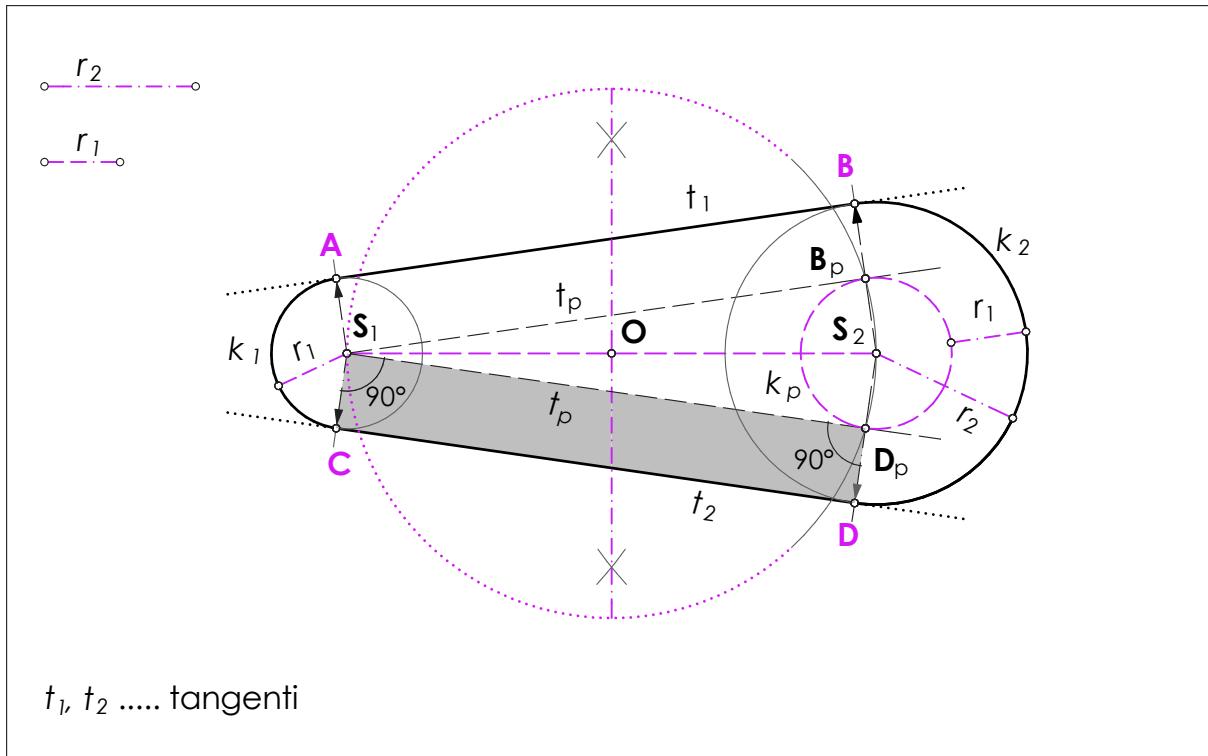
## 2.16 Vbočeni krožni prehod v poljubnem kotu



Dan je polmer  $r$  krožnega loka vbočenega krožnega prehoda v kotu z vrhom v točki **A**.

Iz vrha **A** narišemo krožni lok s polmerom  $r$ , ki sekata kraka kota v točkah **B** in **C** ter tvori vbočen krožni prehod med krakoma danega kota ob vrhu **A**.

## 2.17 Zunanji tangenti na krožnici z različima polmeroma



Dani sta krožnici  $k_1$  in  $k_2$  s polmeroma  $r_1 < r_2$  in medsebojno središčno razdaljo  $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ .

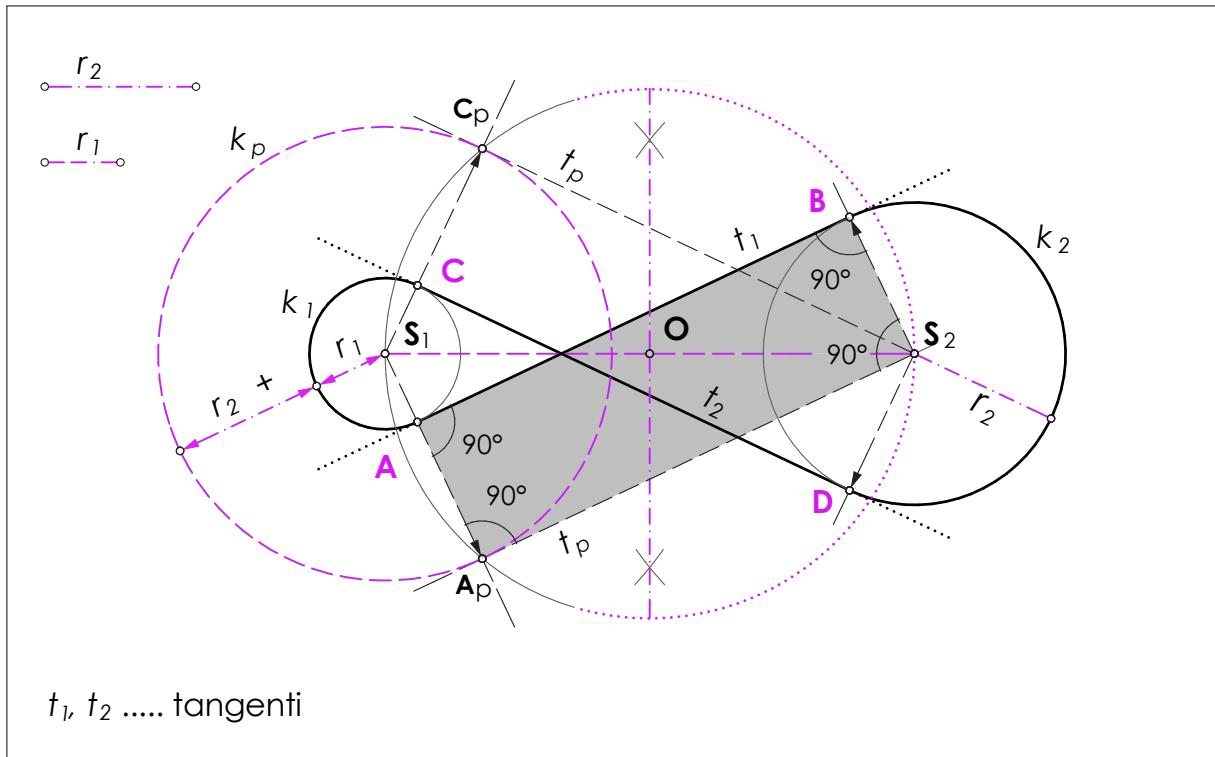
V središču  $\mathbf{S}_2$  večje krožnice  $k_2$  narišemo istosrediščno pomožno krožnico  $k_p$  s polmerom, ki je enak razlike dolžin polmerov ( $r_2 - r_1$ ) danih krožnic. Iz središča  $\mathbf{S}_1$  manjše krožnice  $k_1$  narišemo pomožni tangenti  $t_p$  na pomožno krožnico  $k_p$ . Pomožni dotikališči  $\mathbf{B}_p$  in  $\mathbf{D}_p$  določimo s Talesovo krožnico skozi središči  $\mathbf{S}_1$  in  $\mathbf{S}_2$  ter s središčem v točki  $\mathbf{O}$ .

*Določanje dotikališč tangent na manjši krožnici  $k_1$ :* Iz središča  $\mathbf{S}_1$  manjše krožnice narišemo pravokotnici na pomožni tangenti  $t_p$ . Presečišči teh pravokotnic z manjšo krožnico  $k_1$  sta dotikališči  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{C}$  tangent  $t_1$  in  $t_2$ .

*Določanje dotikališč tangent na večji krožnici  $k_2$ :* Iz središča  $\mathbf{S}_2$  večje krožnice narišemo pravokotnici na pomožni tangenti  $t_p$  skozi pomožni dotikališči  $\mathbf{B}_p$  in  $\mathbf{D}_p$  do večje krožnice  $k_2$ . Presečišči teh pravokotnic z večjo krožnico  $k_2$  sta dotikališči  $\mathbf{B}$  in  $\mathbf{D}$  tangent  $t_1$  in  $t_2$ .

Premici, ki ju narišemo skozi ustrezni dotikališči na mali in veliki krožnici, sta iskani zunanji tangenti  $t_1$  in  $t_2$ .

## 2.18 Notranji tangenti na krožnici z različnima polmeroma



Dani sta krožnici  $k_1$  in  $k_2$  s polmeroma  $r_1 < r_2$  in medsebojno središčno razdaljo  $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ .

V središču ene izmed danih krožnic (tukaj v središču  $\mathbf{S}_1$  prve krožnice  $k_1$ ) narišemo istosrediščno pomožno krožnico  $k_p$  s polmerom, ki je enak vsoti dolžin polmerov ( $r_1 + r_2$ ) danih krožnic. Iz središča druge krožnice (iz središča  $\mathbf{S}_2$  krožnice  $k_2$ ) narišemo pomožni tangentni  $t_p$  na pomožno krožnico  $k_p$ . Dotikališči  $\mathbf{A}_p$  in  $\mathbf{C}_p$  na pomožni krožnici  $k_p$  določimo s Talesovo krožnico skozi središči  $\mathbf{S}_1$  in  $\mathbf{S}_2$  danih krožnic ter s središčem v točki  $\mathbf{O}$ .

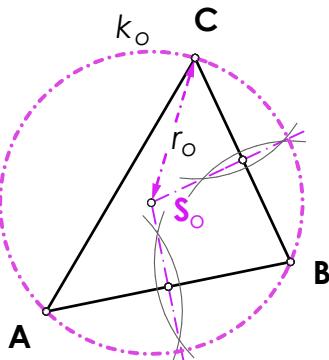
*Določanje dotikališč na manjši krožnici  $k_1$ :* Iz središča  $\mathbf{S}_1$  manjše krožnice narišemo pravokotnici na pomožni tangentni  $t_p$  do pomožnih dotikališč  $\mathbf{A}_p$  in  $\mathbf{C}_p$  na pomožni krožnici  $k_p$ . Presečišči teh pravokotnic z manjšo krožnico  $k_1$  sta dotikališči  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{C}$  tangent  $t_1$  in  $t_2$ .

*Določanje dotikališč na večji krožnici  $k_2$ :* Iz središča  $\mathbf{S}_2$  večje krožnice narišemo pravokotnici na pomožni tangentni  $t_p$ . Presečišči teh pravokotnic z večjo krožnico  $k_2$  sta dotikališči  $\mathbf{B}$  in  $\mathbf{D}$  tangent  $t_1$  in  $t_2$ .

Premici, ki ju narišemo skozi ustrezni dotikališči na mali in veliki krožnici, sta iskani notranji tangentni  $t_1$  in  $t_2$ .

## 2.19 Trikotniku očrtani krog

$S_o$  = središče očrtanega kroga  
 $r_o$  = polmer očrtanega kroga  
 $k_o$  = očrtani krog



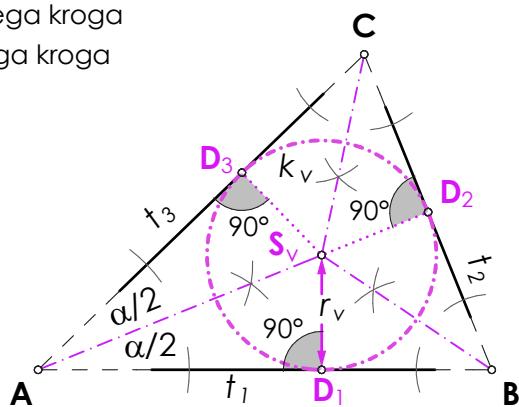
Dan je trikotnik **ABC**.

V trikotniku je središče očrtanega kroga v presečišču simetral stranic trikotnika. Središče je že določeno, če poiščemo presečišče vsaj dveh simetral stranic. Polmer  $r_o$  očrtanega kroga je enak razdalji od središča  $S_o$  očrtanega kroga do enega izmed oglišč trikotnika.

## 2.20 Določanje središča včrtanemu krogu, ki se dotika treh danih tangent

### 2.21 Trikotniku včrtani krog

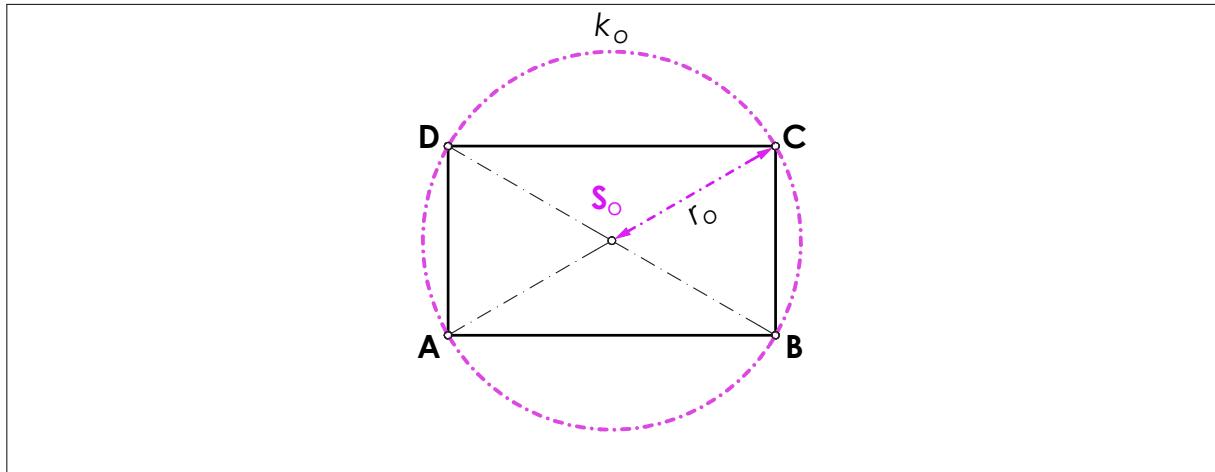
$S_v$  = središče včrtanega kroga  
 $r_v$  = polmer včrtanega kroga  
 $k_v$  = včrtani krog



Dane so tangentne  $t_1$ ,  $t_2$  in  $t_3$ .

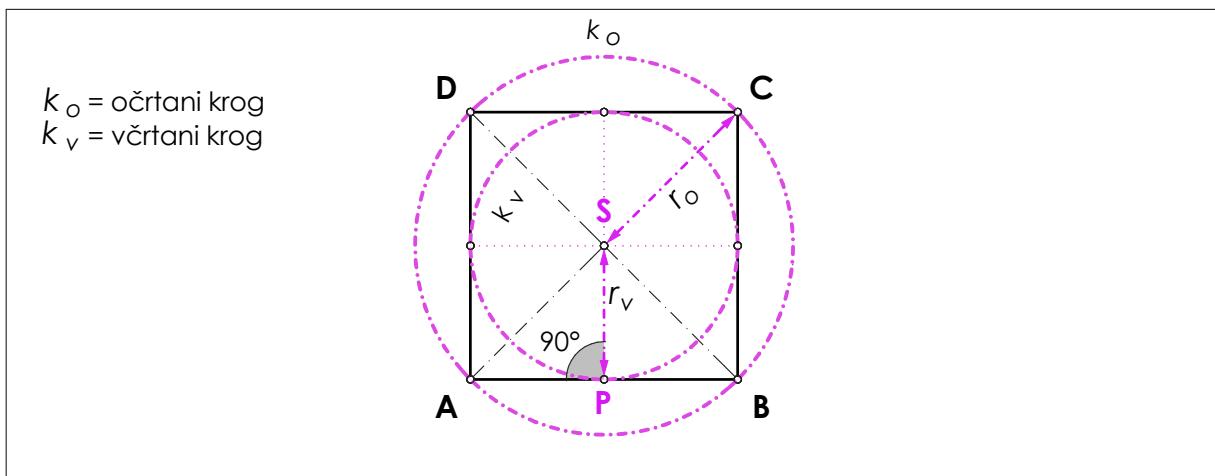
Poiščemo presečišča tangent, ki so tudi oglišča trikotnika **ABC**. Dotikalni krog tangent je hkrati včrtani krog trikotniku **ABC**. Središče dotikalnega kroga je v presečišču simetral notranjih kotov v trikotniku **ABC**. Središče je že določeno, če poiščemo presečišče vsaj dveh simetral kotov. Polmer  $r_v$  včrtanega kroga je enak pravokotni razdalji od središča  $S_v$  včrtanega kroga do dotikalnega kroga na tangentni oziroma stranici trikotnika.

## 2.22 Pravokotniku očrtani krog



Dan je pravokotnik **ABCD**. Središče **S<sub>o</sub>** očrtanega kroga je v presečišču diagonal. Polmer **r<sub>o</sub>** je enak polovici dolžine diagonale.

## 2.23 Kvadratu očrtani in včrtani krog

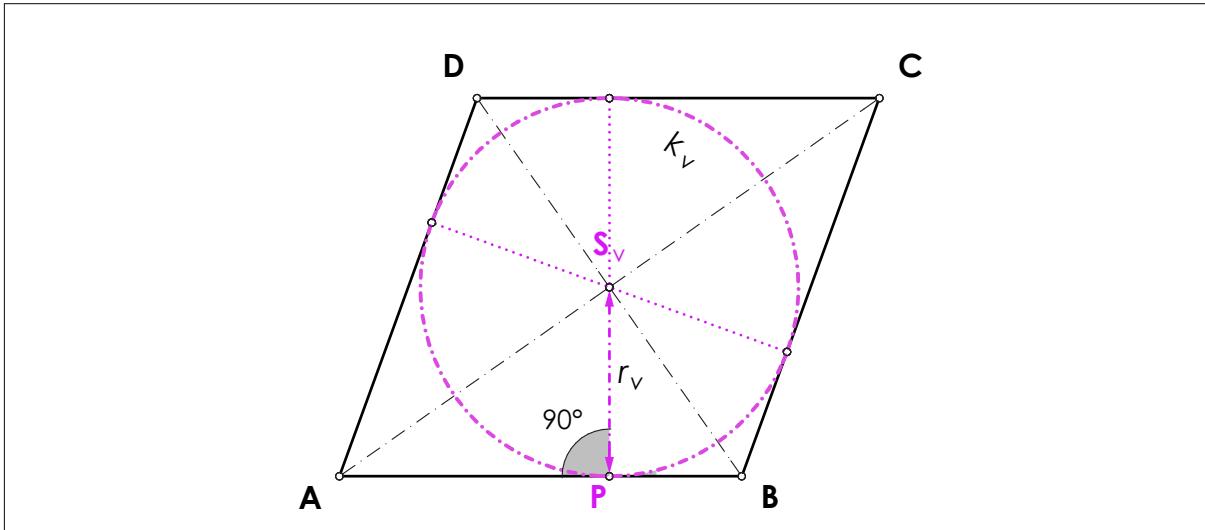


Dan je kvadrat **ABCD**. V kvadratu se sekajo simetrale kotov in stranic v isti točki, ki je središče kvadrata. Diagonali sta tudi simetrali kotov.

Polmer **r<sub>o</sub>** očrtanega kroga je enak polovici dolžine diagonale.

Polmer **r<sub>v</sub>** včrtanega kroga je enak polovici dolžine stranice kvadrata. Dotikalnišče **P** je v presečišču pravokotnice na stranico iz središča **S** kvadrata in stranice kvadrata.

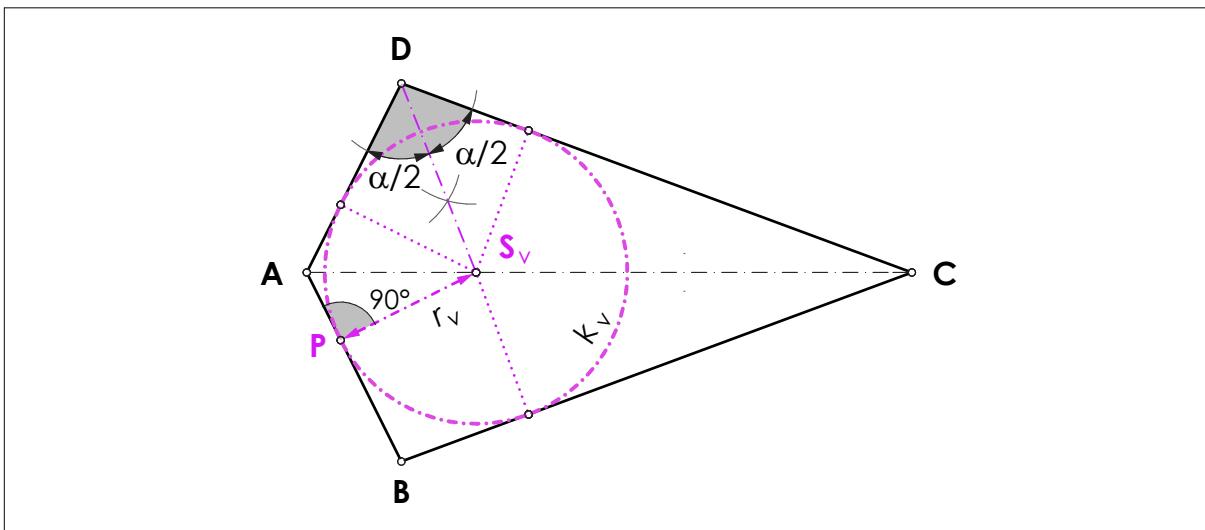
## 2.24 Rombu včrtani krog



Dan je romb **ABCD**.

Središče **S<sub>v</sub>** včrtanega kroga je v presečišču diagonal, dotikališče **P** pa je v presečišču pravokotnice na stranico romba iz središča **S<sub>v</sub>** in stranice romba. Polmer **r<sub>v</sub>** včrtanega kroga je enak pravokotni razdalji od središča **S<sub>v</sub>** do dotikališča **P**.

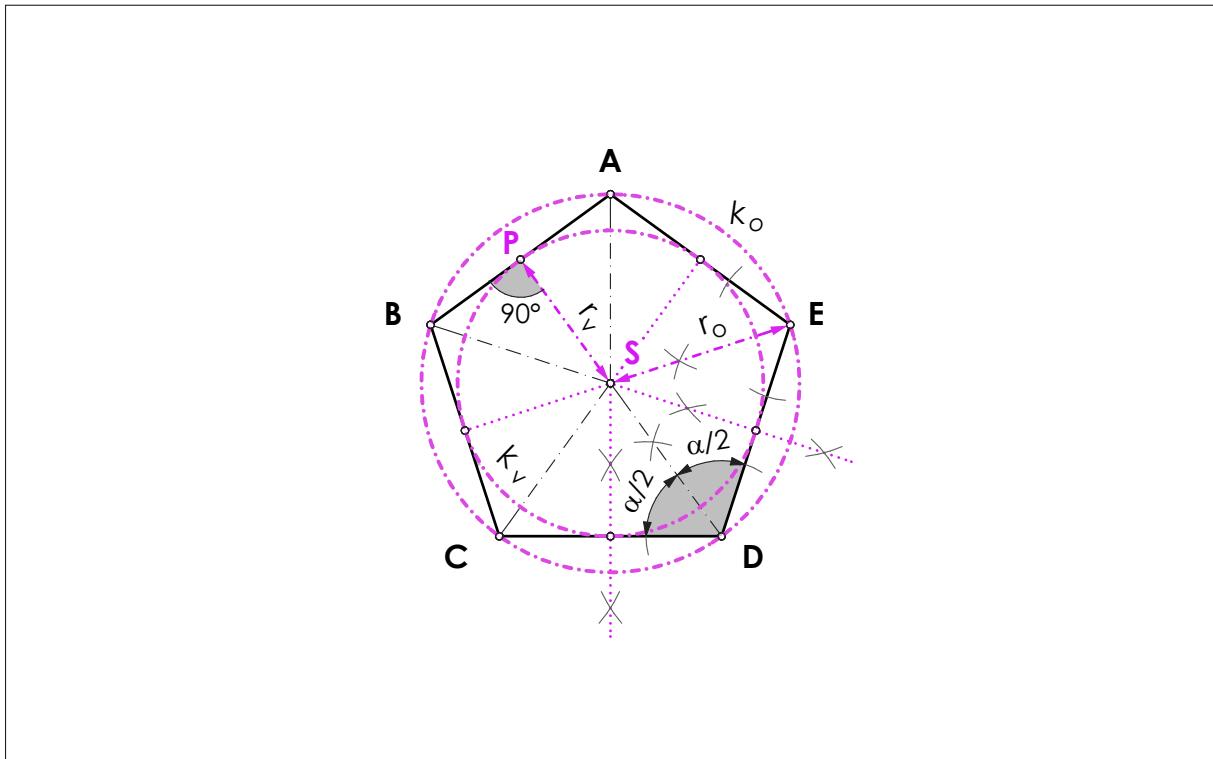
## 2.25 Deltoidu včrtani krog



Dan je deltoid **ABCD**.

Središče **S<sub>v</sub>** včrtanega kroga je v presečišču diagonale **AC** in simetrale kota v oglišču **D**, dotikališče **P** pa je v presečišču pravokotnice na stranico deltoida iz središča **S<sub>v</sub>** in stranice deltoida. Polmer **r<sub>v</sub>** včrtanega kroga je enak pravokotni razdalji od središča **S<sub>v</sub>** do dotikališča **P**.

## 2.26 Pravilnemu mnogokotniku očrtani in včrtani krog



Na sliki sta narisana očrtani in včrtani krog v danem pravilnem petkotniku.

- $k_o$  ..... očrtani krog
- $r_o$  ..... polmer očrtanega kroga
- $k_v$  ..... včrtani krog
- $r_v$  ..... polmer včrtanega kroga

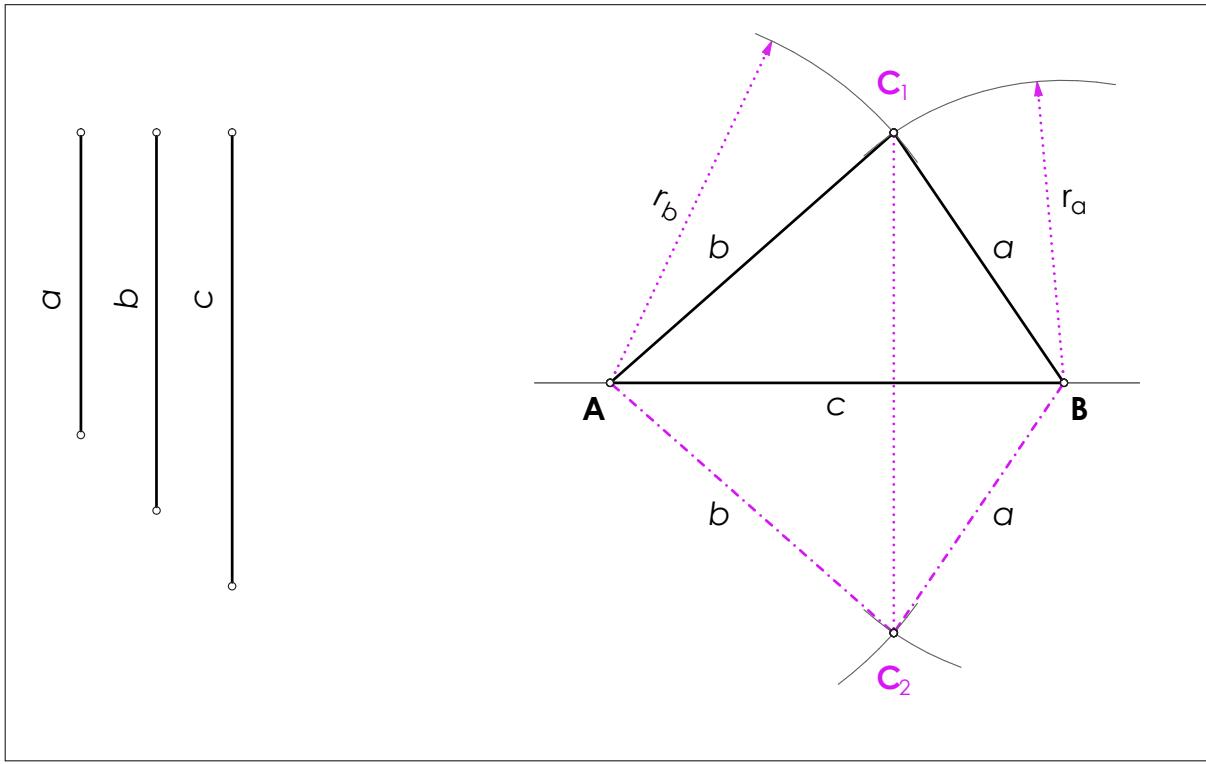
V pravilnem mnogokotniku se sekajo vse simetrale kotov in vse simetrale stranic v isti točki, ki jo imenujemo središče. Ta točka je središče pravilnemu mnogokotniku očrtanega in včrtanega kroga.

Polmer  $r_v$  včrtanega kroga je enak pravokotni razdalji od središča pravilnega mnogokotnika do ene izmed stranic mnogokotnika.

Polmer  $r_o$  očrtanega kroga je enak razdalji od središča pravilnega mnogokotnika do enega izmed oglišč mnogokotnika.

### 3 TRIKOTNIKI

#### 3.1 Načrtovanje trikotnika, če so dane tri stranice (sss)



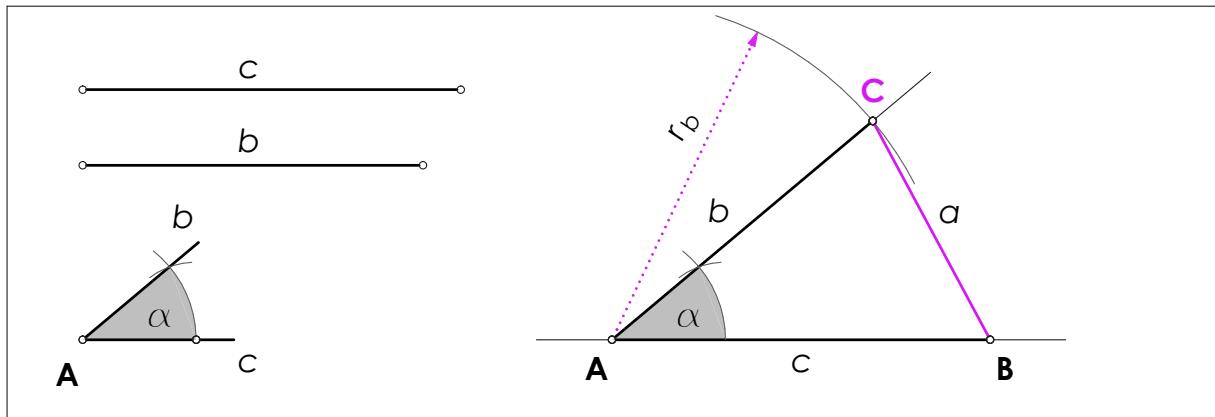
Dane so stranice  $a$ ,  $b$  in  $c$ .

Pogoji:  $c < a + b$ ,  $b < a + c$ ,  $a < b + c$

Narišemo premico in na njej odmerimo dolžino stranice  $c$ , kjer sta krajišči **A** in **B** že oglišči trikotnika. Nato narišemo krožni lok s polmerom dolžine stranice  $b$  in s središčem v oglišču **A**. Zatem narišemo še krožni lok s polmerom dolžine stranice  $a$  in s središčem v oglišču **B**. Oba krožna loka se sekata v točkah **C**<sub>1</sub> in **C**<sub>2</sub>, ki sta oglišči trikotnikov **ABC**<sub>1</sub> in **ABC**<sub>2</sub>.

*Naloga ima dve rešitvi. Dobljena trikotnika **ABC**<sub>1</sub> in **ABC**<sub>2</sub> sta simetrična glede na premico, nosilko stranice **AB**.*

### 3.2 Načrtovanje trikotnika, če sta dani stranici in kot med njima (sks)



Dani sta stranici  $b$ ,  $c$  in kot  $\alpha$  med njima.

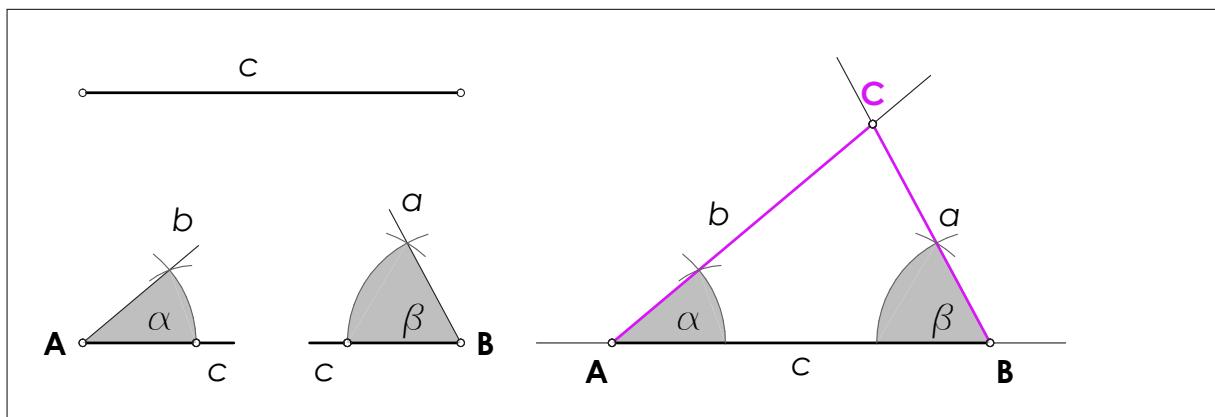
Pogoj:  $\alpha < 180^\circ$

Narišemo premico in na njej odmerimo dolžino stranice  $c$ , kjer sta krajišči **A** in **B** že oglišči trikotnika. V oglišču **A** nanesemo dani kot  $\alpha$ , tako da poteka krak  $c$  skozi oglišči **A** in **B**. Krožni lok s polmerom dolžine stranice  $b$  in s središčem v oglišču **A** seka prosti krak  $b$  kota  $\alpha$  v točki **C**.

Točke **A**, **B** in **C** so oglišča trikotnika **ABC**, daljica **BC** pa je iskana stranica  $a$ .

Rešitev je samo ena.

### 3.3 Načrtovanje trikotnika, če so dani stranica in njej priležna kota (ksk)



Dana je stranica  $c$  in njej priležna kota  $\alpha$  in  $\beta$ .

Pogoj:  $\alpha + \beta < 180^\circ$

Narišemo premico in na njej odmerimo dolžino stranice  $c$ , kjer sta krajišči **A** in **B** že oglišči trikotnika. V oglišču **A** stranice  $c$  nanesemo kot  $\alpha$ , tako da poteka krak  $c$  skozi oglišči **A** in **B**. V oglišču **B** stranice  $c$  nanesemo kot  $\beta$ , tako da poteka krak  $c$  skozi oglišči **B** in **A**. Kraka kotonov, ki ne ležita na stranici  $c$ , se sekata v točki **C**, ki je tretje oglišče trikotnika **ABC**.

Daljici **AC** in **BC** sta iskani stranici  $b$  in  $a$ . Rešitev je samo ena.

### 3.4 Načrtovanje trikotnika, če sta dani stranici in kot, ki leži daljši stranici nasproti (SsK)

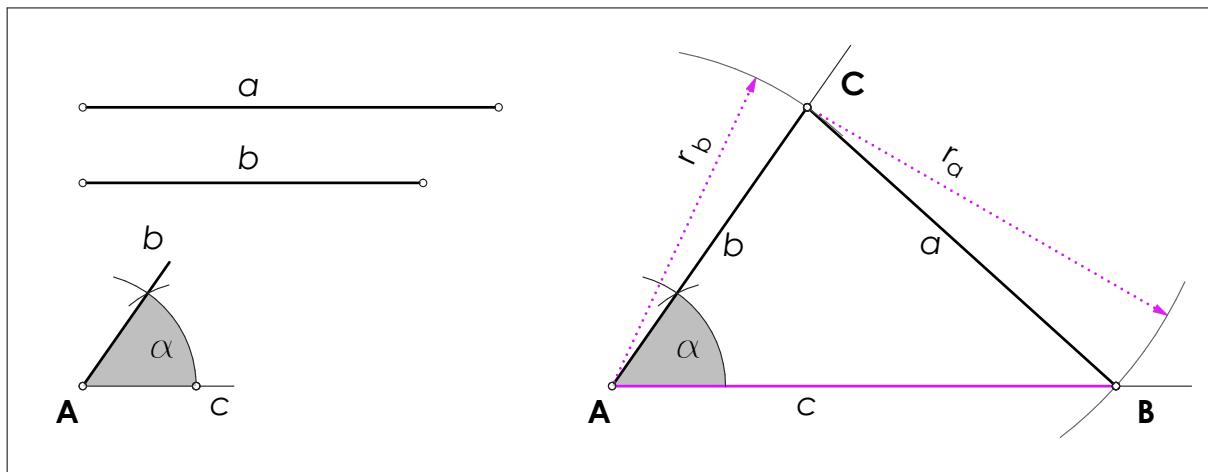
Dani sta stranici  $a$ ,  $b$  in kot  $\alpha$ .

Pogoji:  $a > b$ ,  $\alpha < 180^\circ$

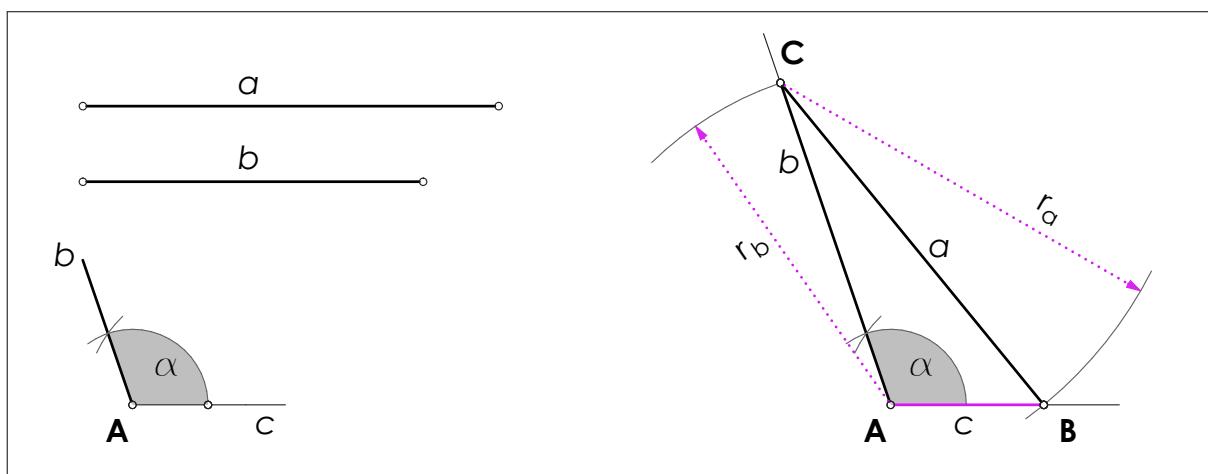
Narišemo kot  $\alpha$  z vrhom v točki **A**, ki je oglišče **A** trikotnika. Kot  $\alpha$  omejujeta kraka **b** in **c**. Krožni lok s polmerom dolžine stranice **b** in s središčem v oglišču **A** seka prosti krak **b** kota  $\alpha$  v točki **C**, ki je oglišče **C** trikotnika. Krožni lok s polmerom dolžine stranice **a** in s središčem v oglišču **C** seka prosti krak **c** kota  $\alpha$  v točki **B**, ki je oglišče trikotnika.

Daljica **AB** je iskana stranica **c** (sliki 3.4.1 in 3.4.2). Rešitev je samo ena.

#### 3.4.1 Dani sta stranici in ostri kot, ki leži daljši stranici nasproti (SsK)



#### 3.4.2 Dani sta stranici in topi kot, ki leži daljši stranici nasproti (SsK)



### 3.5 Načrtovanje trikotnika, če sta dani stranici in kot, ki leži krajši stranici nasproti (Ssk) – osnovni postopek

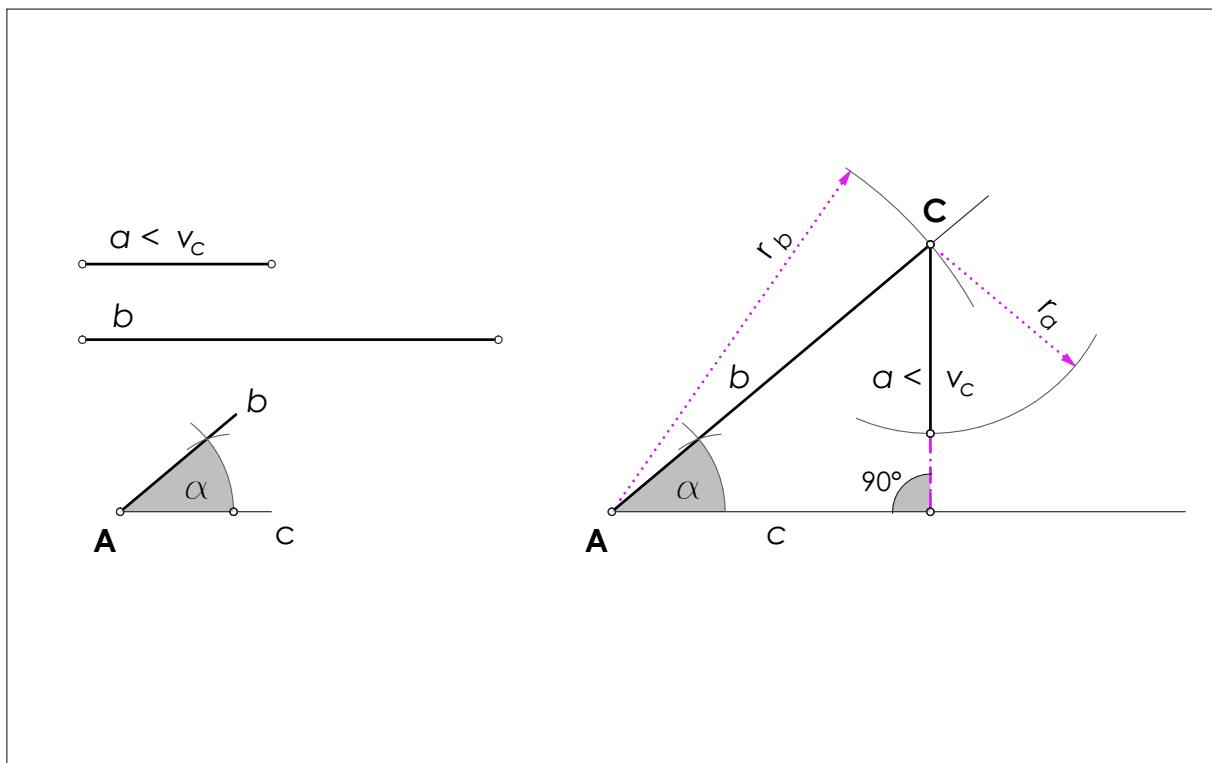
Dani sta stranici  $a$ ,  $b$  in kot  $\alpha$ .

Pogoji:  $a < b$  in  $\text{kot } \alpha < 90^\circ$

Narišemo kot  $\alpha$  z vrhom v točki **A**, ki je oglišče **A** trikotnika. Kot  $\alpha$  omejujeta kraka **b** in **c**. Krožni lok s polmerom dolžine stranice **b** in s središčem v oglišču **A** seka prosti krak **b** kota  $\alpha$  v točki **C**, ki je oglišče **C** trikotnika. Nato narišemo krožni lok s polmerom dolžine stranice **a** in s središčem v oglišču **C**.

V odvisnosti od dolžine stranice **a** moramo ločiti tri možnosti rešitve naloge.

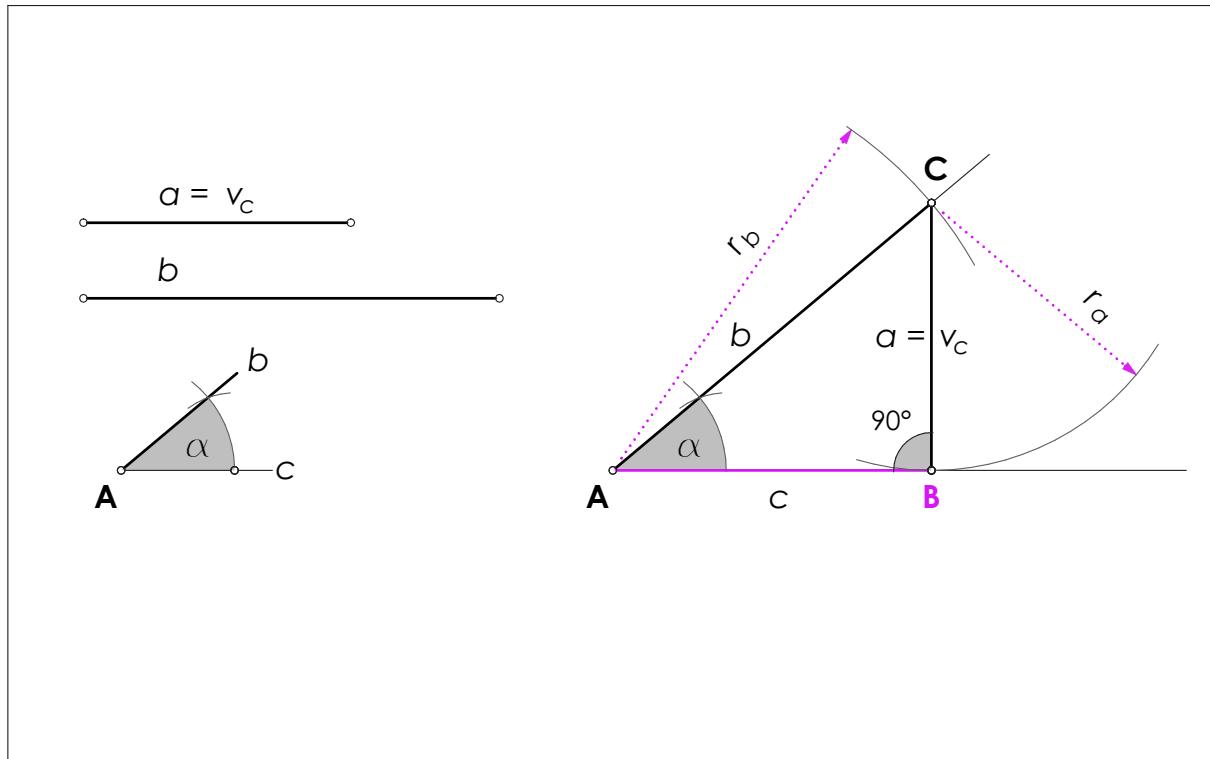
#### 3.5.1 Možnost 1: V trikotniku je dolžina stranice **a** krajša od dolžine $v_c$ .



Če je dolžina stranice **a** krajša od dolžine  $v_c$ , naloga nima rešitve.

Krožni lok s polmerom dolžine stranice **a** in s središčem v oglišču **C** ne seka prostega kraka **c**. V tem primeru trikotnik z danimi podatki ne obstaja.

### 3.5.2 Možnost 2: V trikotniku je dolžina stranice $a$ enaka dolžini $v_c$ .

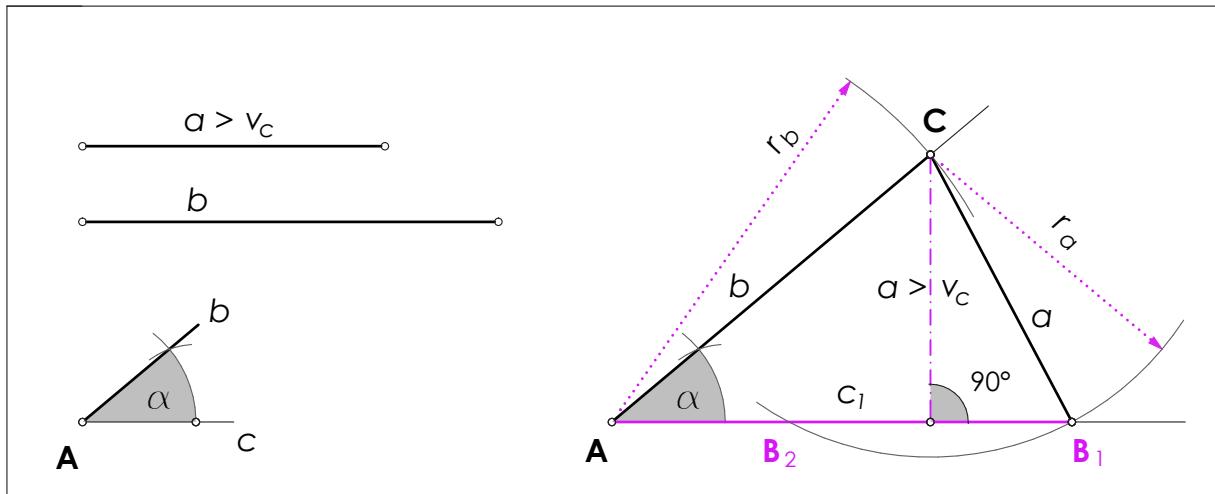


Če je dolžina stranice  $a$  enaka dolžini  $v_c$ , ima naloga eno rešitev.

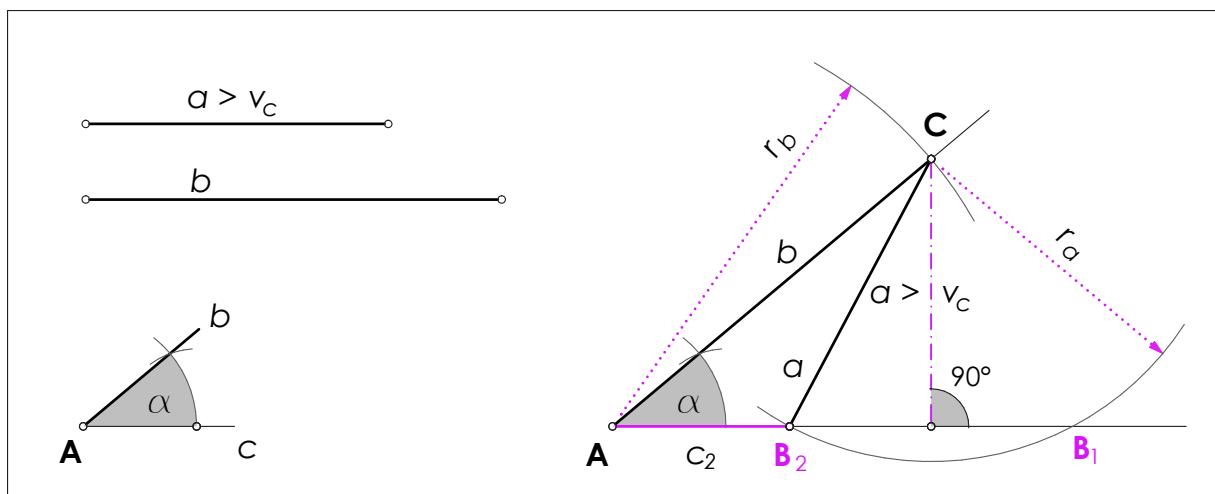
Krožni lok s polmerom dolžine stranice  $a$  in s središčem v oglišču **C** se dotika prostega kraka **c** v točki **B**, ki je oglišče pravokotnega trikotnika **ABC**.

Daljica **AB** je iskana stranica **c**.

### 3.5.3 Možnost 3: V trikotniku je dolžina stranice $a$ večja od dolžine $v_c$ .



Slika 3.5.3.1



Slika 3.5.3.2

Če je dolžina stranice  $a$  večja od dolžine  $v_c$ , ima naloga dve rešitvi.

Krožni lok s polmerom dolžine stranice  $a$  in s središčem v oglišču **C** seka prosti krak **c** v točkah **B<sub>1</sub>** in **B<sub>2</sub>**, ki sta oglišči trikotnika **ABC** (slika 3.5.3.1) in trikotnika **AB<sub>2</sub>C** (slika 3.5.3.2).

Daljici **AB<sub>1</sub>** in **AB<sub>2</sub>** sta iskani stranici **c<sub>1</sub>** in **c<sub>2</sub>**.

## 4 PRAVILNI MNOGOKOTNIK V OČRTANEM KROGU

### 4.1 Načrtovanje pravilnih mnogokotnikov

Natančne grafične konstrukcije pravilnih  $n$ -kotnikov:

Konstruktibilni  $n$ -kotniki, ki jih lahko natančno narišemo z ravnalom in šestilom za  $n$  (število stranic)  $< 100$ :

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96.

Približne grafične konstrukcije pravilnih  $n$ -kotnikov:

Natančna konstrukcija z ravnalom in šestilom pravilnega  $n$ -kotnika, kjer je število stranic  $n$  poljubno izbrano, ni vedno izvedljiva. Zato uporabljamo približne konstrukcije, katerih rezultati so v grafični obliki ustrezeni.

Nekatere pravilne mnogokotnike je mogoče narisati na več načinov. Izberemo tisto konstrukcijo, ki je v nalogi najprimernejša.

### 4.2 Enačbe za izračun elementov v pravilnem mnogokotniku

$$\alpha = 2\beta$$

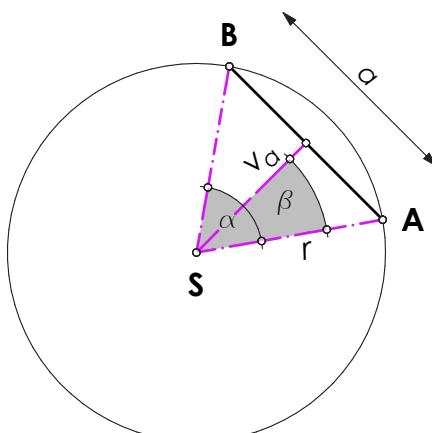
$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}$$

$$v_a = r \cdot \cos \beta$$

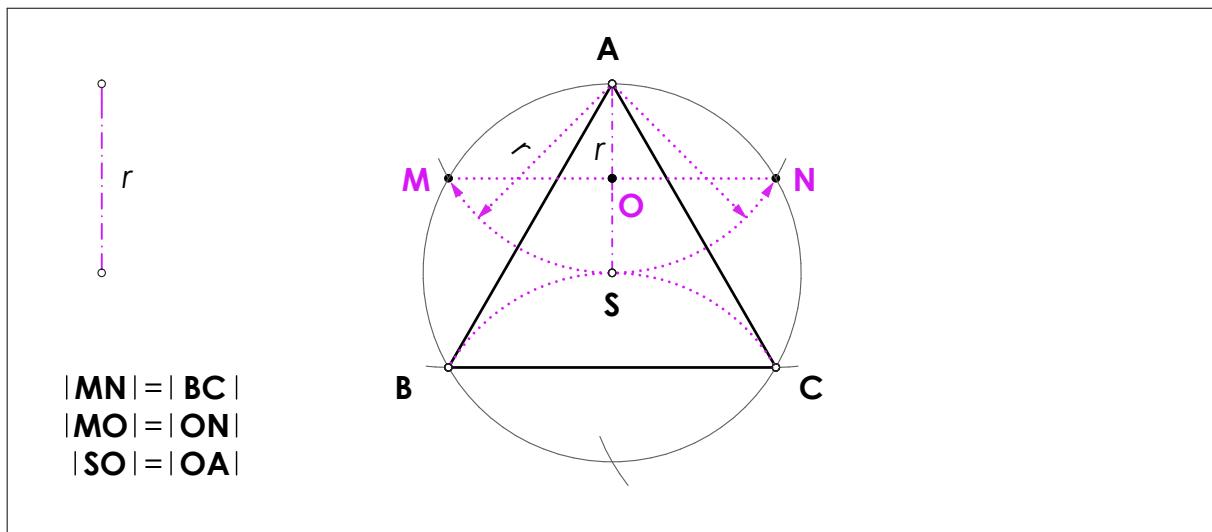
$$\frac{\alpha}{2} = r \cdot \sin \beta$$

$$v_a = \frac{\alpha}{2} \cdot \cot \beta$$

$$r^2 = v_a^2 + \frac{\alpha^2}{4}$$



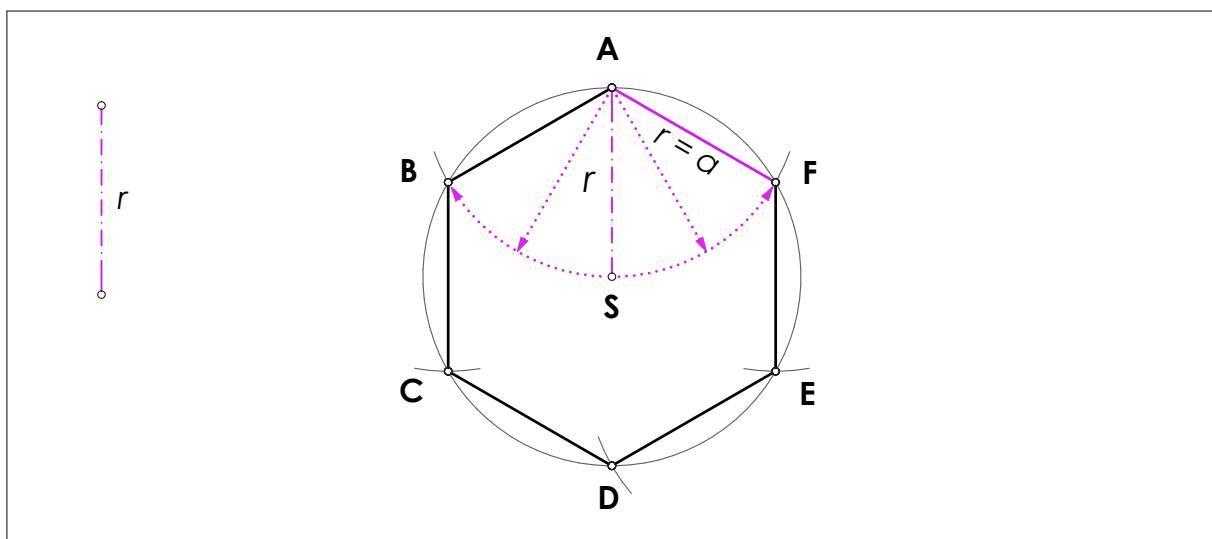
### 4.3 Enakostranični trikotnik



Narišemo očrtani krog z danim polmerom  $r$ . Iz točke na krožnici nanašamo na krožnico njegov polmer  $r$ , da dobimo 6 točk. Vsaka druga točka je oglišče enakostraničnega trikotnika.

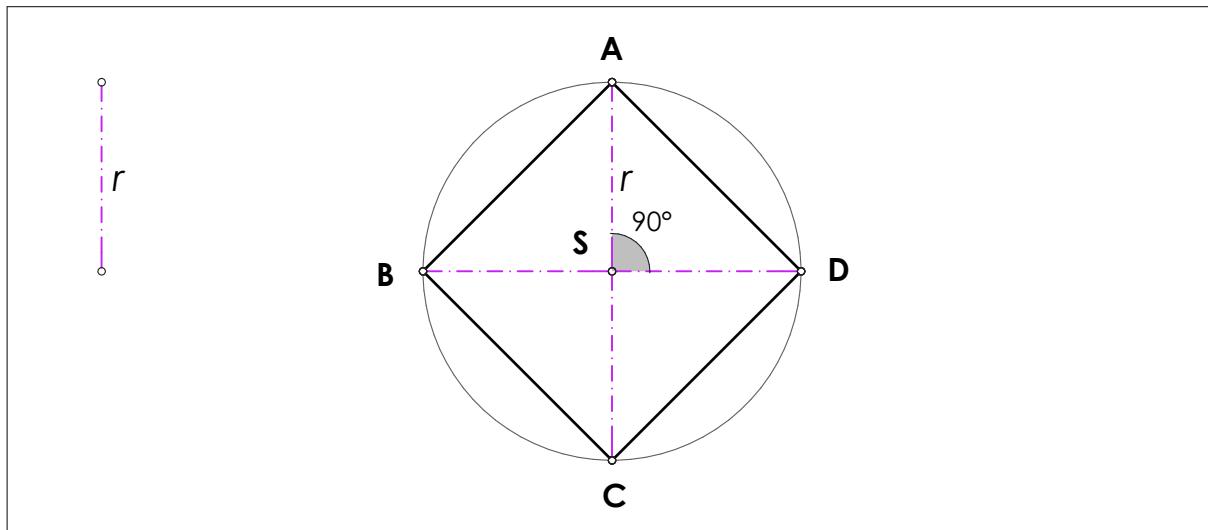
*Opomba: Iz risbe vidimo, da je daljica **MN** simetrala polmera  $r$  očrtanega kroga, dolžina daljice **MN** pa je enaka dolžini stranice **BC** enakostraničnega trikotnika.*

### 4.4 Pravilni šestkotnik



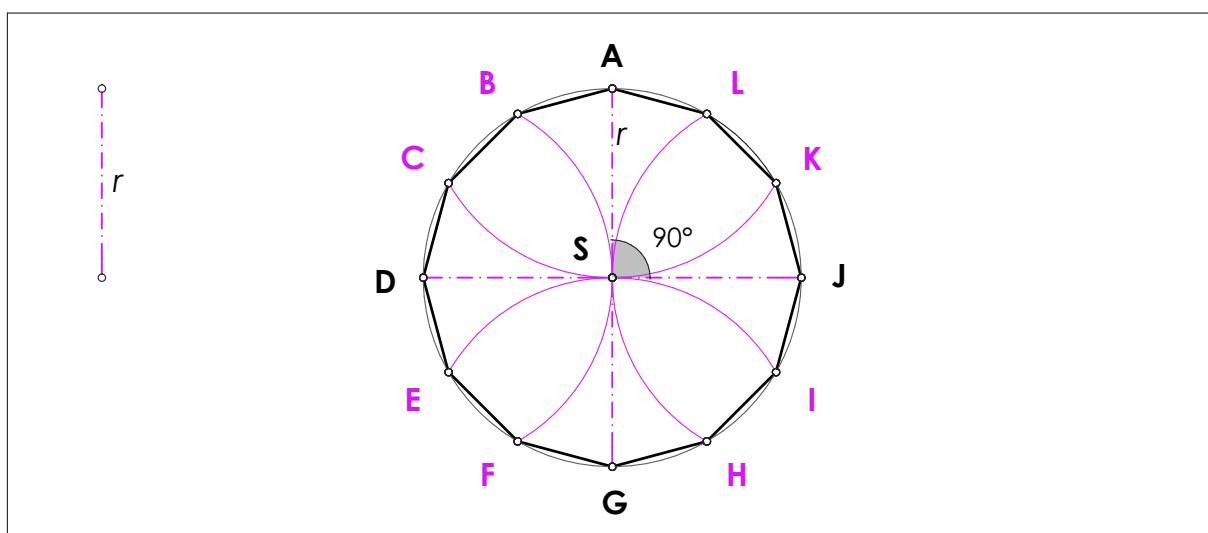
V pravilnem šestkotniku je polmer  $r$  očrtanega kroga enak dolžini stranice  $a$ . Narišemo očrtani krog z danim polmerom  $r$  in iz točke na krožnici nanašamo njegov polmer  $r$  kot tetivo na krožnico.

#### 4.5 Kvadrat



Narišemo očrtani krog z danim polmerom  $r$ . Skozi središče  $S$  kroga narišemo dva med seboj pravokotna premera, da sekata krožnico v točkah  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in  $D$ , ki so oglišča kvadrata.

#### 4.6 Pravilni dvanajstkotnik



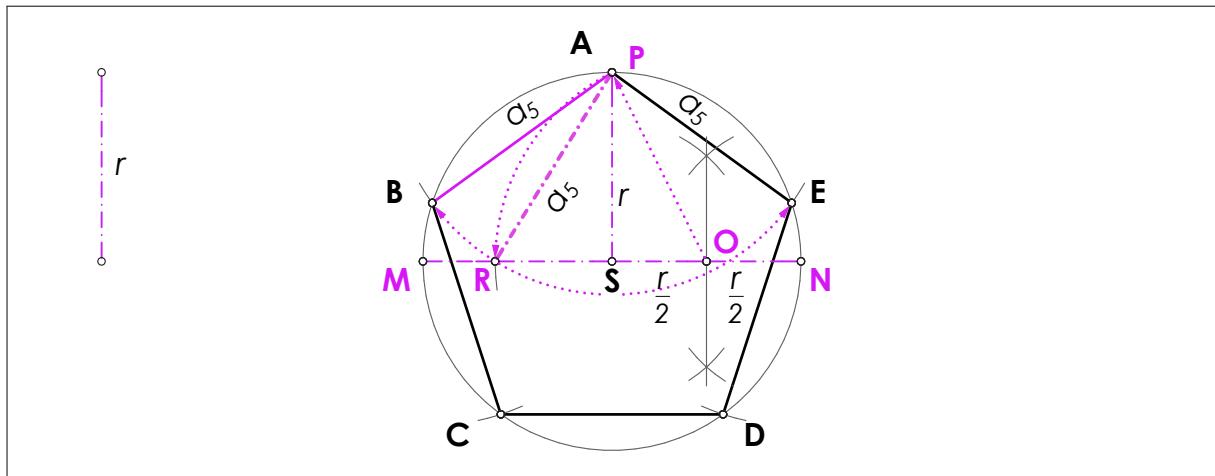
Narišemo očrtani krog z danim polmerom  $r$ . Skozi središče  $S$  kroga narišemo dva med seboj pravokotna premera, da sekata krožnico v točkah  $A$ ,  $D$ ,  $G$  in  $J$ , ki so že štiri oglišča pravilnega dvanajstkotnika. Iz teh oglišč narišemo skozi središče  $S$  krožne loke s polmerom  $r$ . Presečišča krožnih lokov s krožnico so manj-kajoča oglišča pravilnega dvanajstkotnika.

#### 4.7 Pravilni petkotnik in pravilni desetkotnik – osnovni postopek

Dolžini stranic pravilnega 5-kotnika in pravilnega 10-kotnika določimo z isto osnovno konstrukcijo.

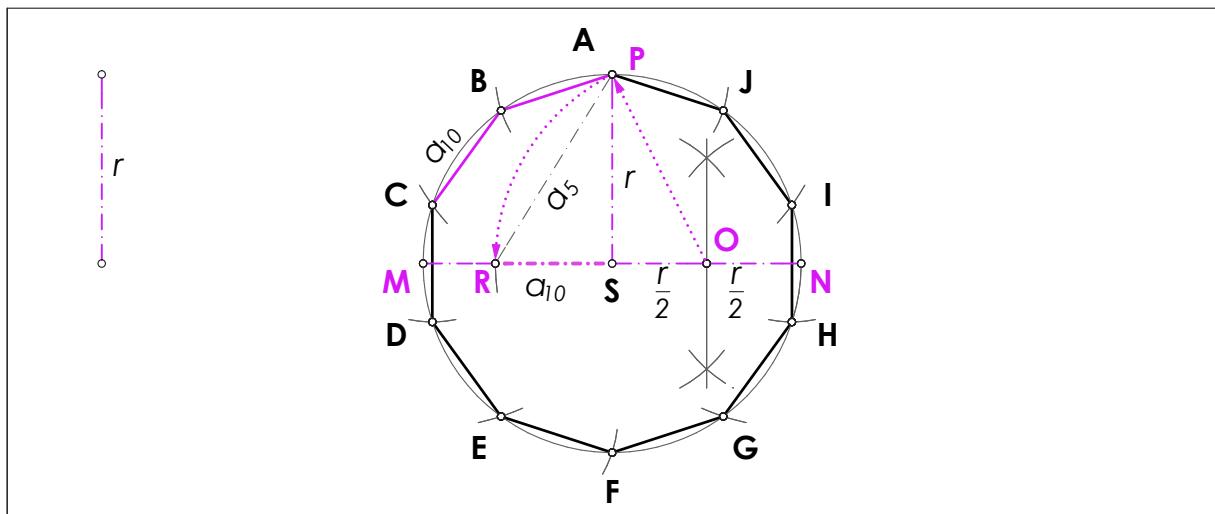
Narišemo očrtani krog z danim polmerom  $r$ . Skozi središče  $S$  narišemo premer  $MN$  in na ta premer pravokotni polmer  $SP$ . Razpolovimo polmer  $SN$ , da dobimo razpolovišče  $O$ . Iz točke  $O$  narišemo krožni lok skozi točko  $P$ , da seka premer  $MN$  v točki  $R$ .

#### 4.8 Pravilni petkotnik



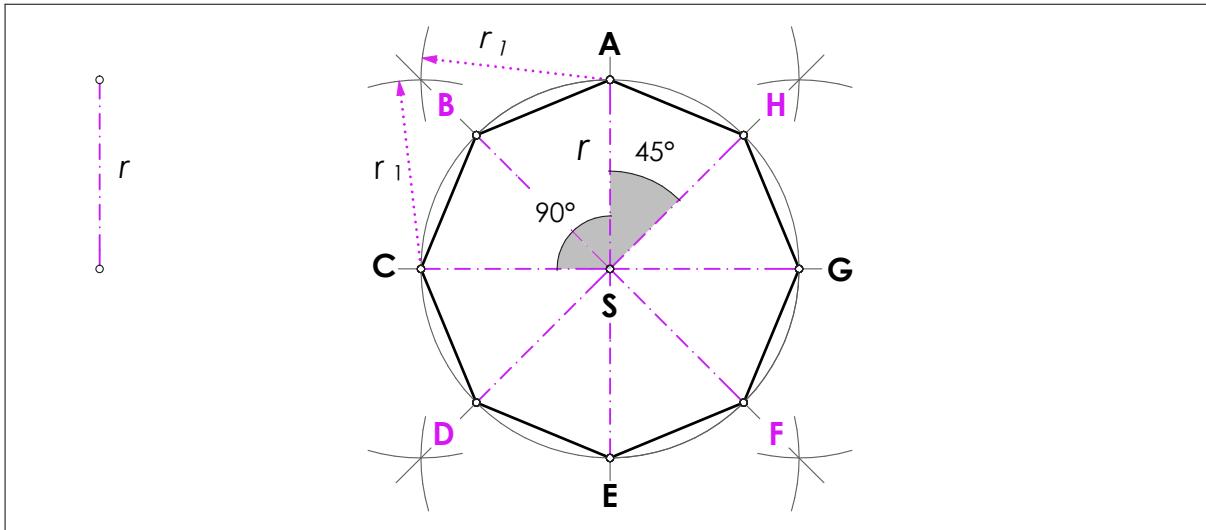
Dolžina daljice  $PR$  je enaka dolžini stranice pravilnega petkotnika, ki jo nanašamo kot tetivo na krožnico.

#### 4.9 Pravilni desetkotnik



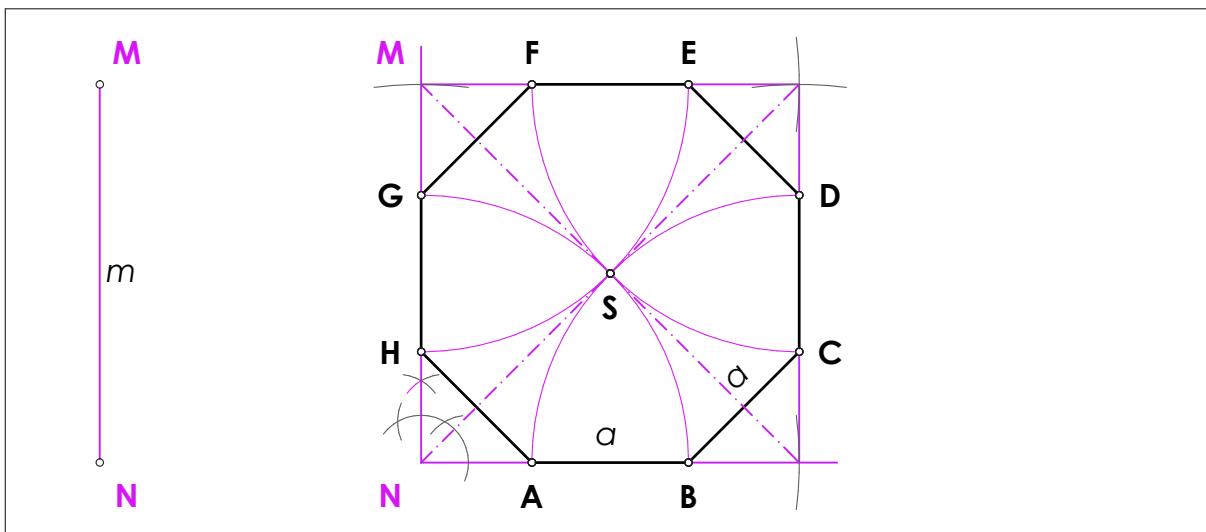
Dolžina daljice  $RS$  je enaka dolžini stranice pravilnega desetkotnika, ki jo nanašamo kot tetivo na krožnico.

#### 4.10 Pravilni osemkotnik v očrtanem krogu



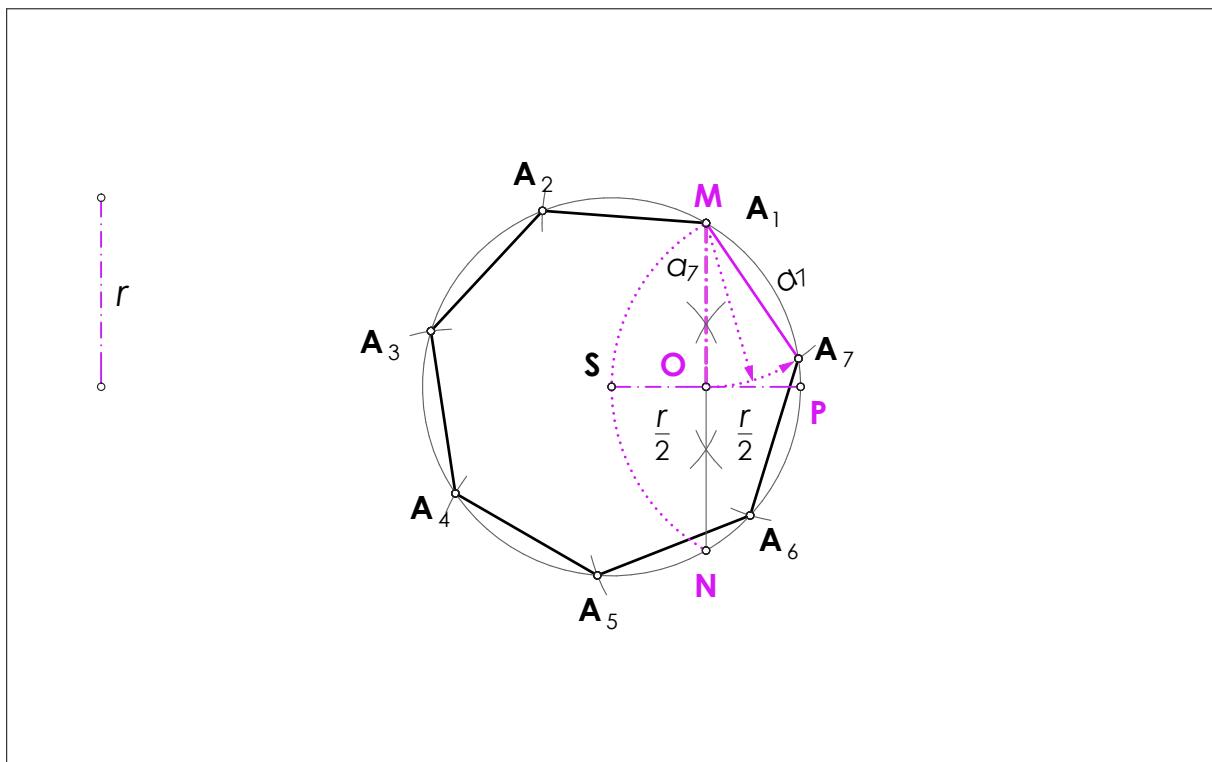
Narišemo očrtani krog z danim polmerom  $r$ . Skozi središče  $S$  narišemo dva med seboj pravokotna premera, da sekata krožnico v točkah  $A$ ,  $C$ ,  $E$  in  $G$ , ki so že štiri oglisča pravilnega osemkotnika. Vmesna oglisča dobimo tako, da razpolovimo krožne loke, ki pripadajo četrtinam kroga. Simetrale sekajo krožnico v točkah, ki so manjkajoča oglisča pravilnega osemkotnika.

#### 4.11 Pravilni osemkotnik v očrtanem kvadratu



Narišemo očrtani kvadrat z dano dolžino stranice  $m$  (konstrukcija 5.2). V kvadratu narišemo diagonali, da dobimo središče  $S$ . Iz oglisč kvadrata narišemo krožne loke skozi njegovo središče  $S$ . Presečišča teh krožnih lokov s stranicami kvadrata so oglisča pravilnega včrtanega osemkotnika.

#### 4.12 Približna konstrukcija pravilnega sedemkotnika

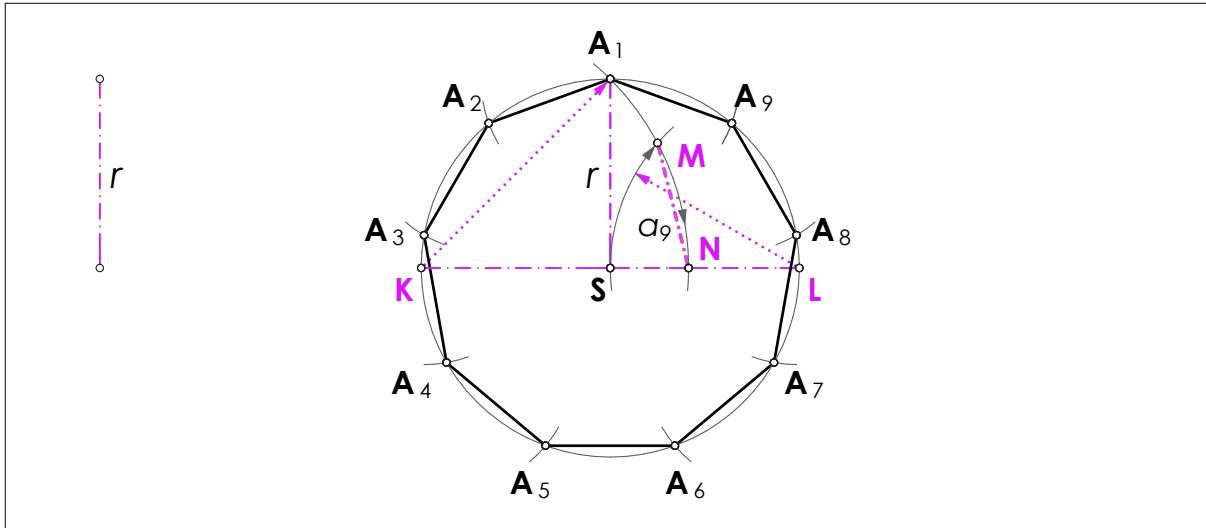


Narišemo očrtani krog z danim polmerom  $r$  in v tem krogu polmer  $\mathbf{SP}$ , ki ga razpolovimo ter narišemo simetralo do presečišča  $\mathbf{M}$  s krožnico. Dolžina simetrale od razpolovišča  $\mathbf{O}$  polmera do presečišča  $\mathbf{M}$  na krožnici je približno enaka dolžini stranice pravilnega sedemkotnika (tukaj daljica  $\mathbf{OM}$ ), ki jo nanašamo kot tetivo na krožnico. Velja tudi, da je razdalja  $\mathbf{OM}$  enaka razdalji  $\mathbf{ON}$ .

*Opomba: Približno konstrukcijo stranice pravilnega sedemkotnika v danem očrtanem krogu lahko opišemo tudi drugače.*

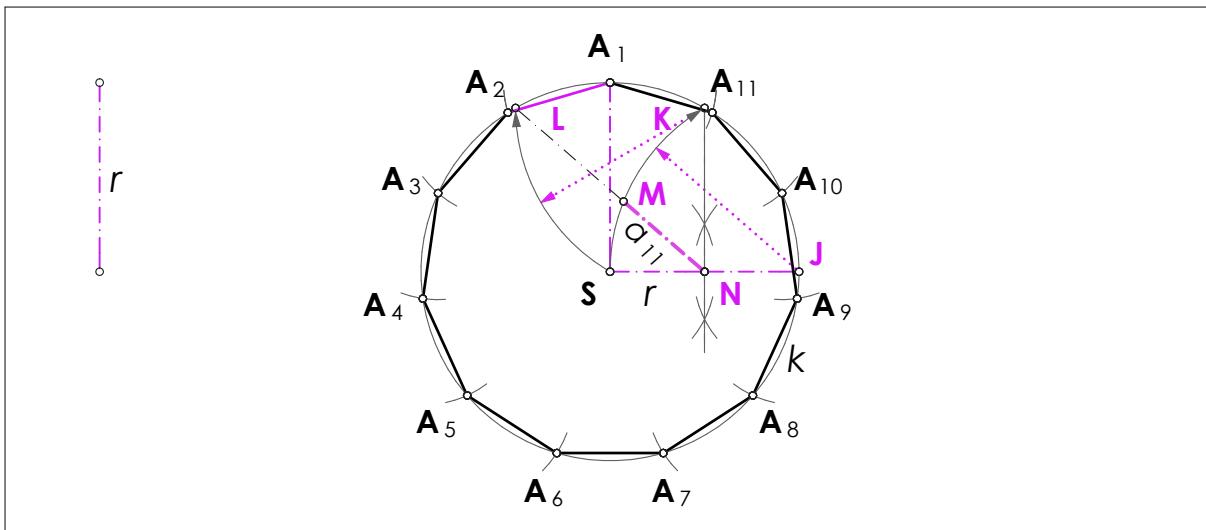
*Na risbi vidimo, da je dolžina simetrale  $\mathbf{MN}$  enaka dolžini stranice enakostraničnega trikotnika v danem očrtanem krogu (konstrukcija 4.3). Prav tako pa je iz risbe razvidno, da je dolžina polovice stranice ( $|\mathbf{MO}| = |\mathbf{ON}|$ ) enakostraničnega trikotnika približno enaka dolžini stranice pravilnega sedemkotnika v danem očrtanem krogu.*

#### 4.13 Približna konstrukcija pravilnega devetkotnika



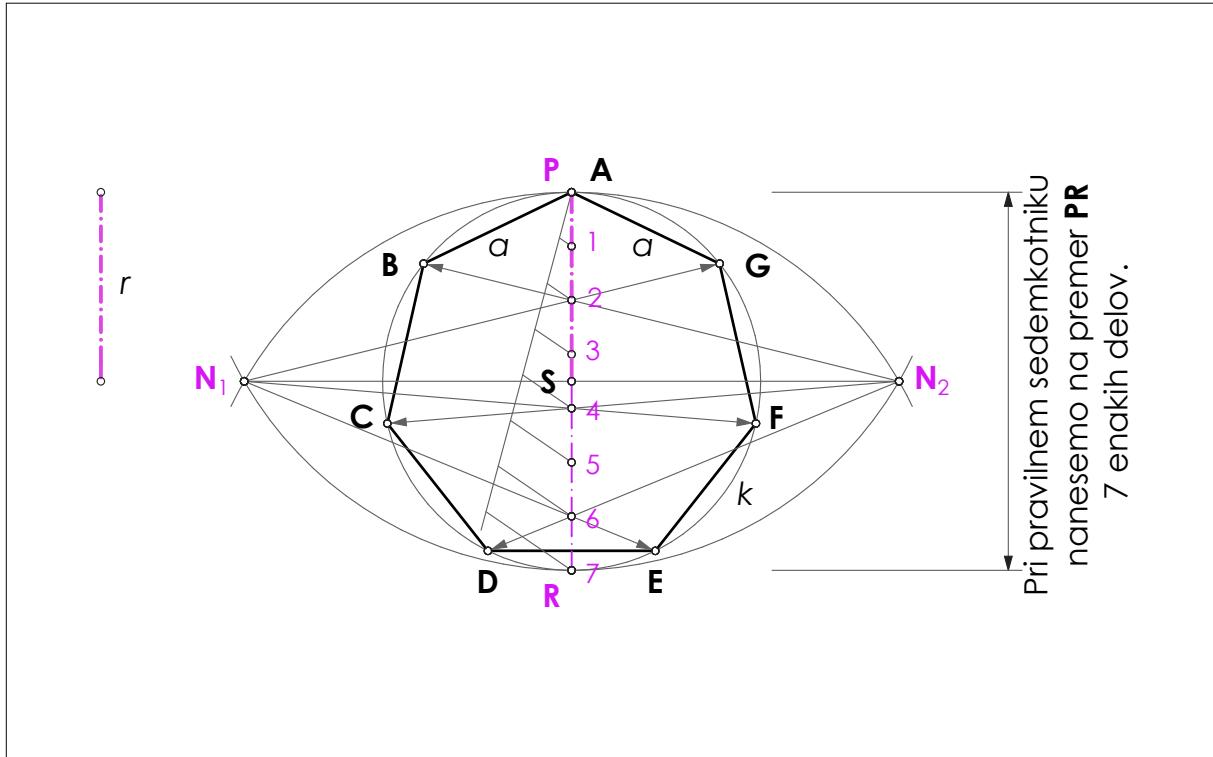
Narišemo očrtani krog z danim polmerom  $r$ . Skozi središče  $S$  narišemo premer  $KL$  in na ta premer pravokotni polmer  $SA_1$ . Iz krajišča  $L$  narišemo krožni lok skozi središče  $S$ . Iz krajišča  $K$  narišemo krožni lok skozi točko  $A_1$  na krožnici. Ta krožni kot seka premer  $KL$  v točki  $M$ . Oba krožna loka se sekata v točki  $N$ . Dolžina daljice  $MN$  je približno enaka dolžini stranice pravilnega devetkotnika, ki jo nanašamo kot tetivo na krožnico.

#### 4.14 Približna konstrukcija pravilnega enajstkotnika



Narišemo očrtani krog z danim polmerom  $r$ . Skozi središče  $S$  narišemo dva med seboj pravokotna polmera  $SA_1$  in  $SJ$ . Narišemo simetralo polmera  $SJ$ , da dobimo razpolovišče  $N$ . Iz krajišča  $J$  narišemo skozi središče  $S$  krožni lok, ki seka krožnico  $k$  v točki  $K$ . Iz točke  $K$  narišemo skozi središče  $S$  krožni lok, ki seka krožnico  $k$  v točki  $L$ . Zveznica točke  $L$  na krožnici  $k$  in razpolovišča  $N$  na polmeru  $SJ$  seka krožni lok  $SK$  v točki  $M$ . Dolžina daljice  $MN$  je približno enaka dolžini stranice pravilnega enajstkotnika, ki jo nanašamo kot tetivo na krožnico.

#### 4.15 Približna konstrukcija pravilnega mnogokotnika v očrtanem krogu – splošni način

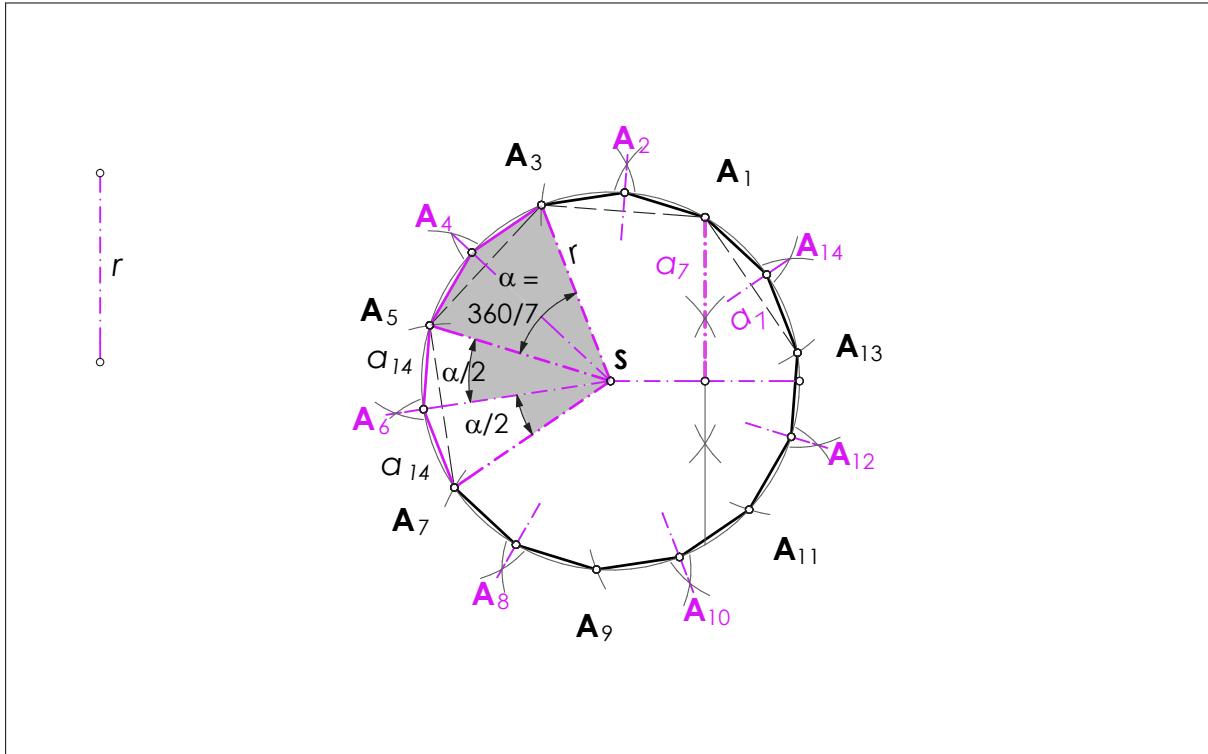


Na sliki je narisani pravilni sedemkotnik.

Narišemo očrtani krog z danim polmerom  $r$ . Skozi središče **S** kroga narišemo dva med seboj pravokotna premera. Premer **PR** razdelimo na toliko enakih delov (konstrukcija 1.7), kolikor ima pravilni mnogokotnik stranic. Iz točk **P** in **R** narišemo krožna loka s polmerom dolžine **PR**. Ta krožna loka se sekata v točkah **N<sub>1</sub>** in **N<sub>2</sub>**. Iz točk **N<sub>1</sub>** in **N<sub>2</sub>** ter skozi vsako drugo delilno točko na premeru **PR** narišemo poltrake, ki jih podaljšamo do krožnice **k**. Te zveznice sekajo krožnico v točkah, ki so oglisča iskanega pravilnega mnogokotnika.

#### 4.16 Pravilni $2n$ -kotnik

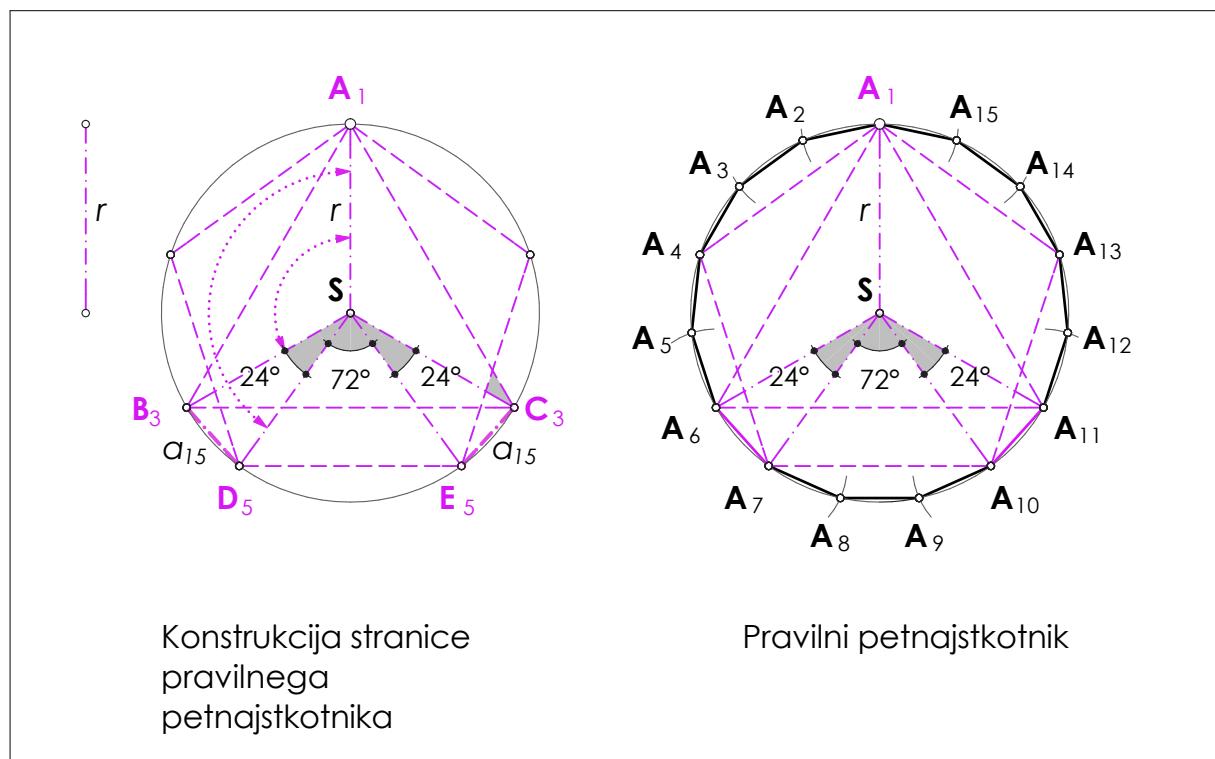
$n$  = število stranic osnovnega pravilnega mnogokotnika  
 $2n$  = pravilni mnogokotnik z 2-kratnim številom stranic osnovnega pravilnega mnogokotnika



Na sliki je narisana konstrukcija pravilnega štirinajstkotnika.

Narišemo očrtani krog z danim polmerom  $r$ . Nato določimo oglišča pravilnega  $n$ -kotnika (tukaj je narisani pravilni sedemkotnik) po osnovni konstrukciji. Vmesna oglišča dobimo tako, da razpolovimo loke, ki pripadajo središčnim kotom  $360^\circ/n$  pravilnega  $n$ -kotnika. Simetrale sekajo krožnico v točkah, ki so vmesna oglišča pravilnega  $2n$ -kotnika.

### 4.17 Pravilni petnajstkotnik



Stranico pravilnega 15-kotnika dobimo s prekrivanjem pravilnega 5-kotnika z enakostraničnim 3-kotnikom.

V očrtanem krogu z danim polmerom  $r$  narišemo pravilni 5-kotnik in enakostranični 3-kotnik, tako da imata eno skupno oglišče (tukaj oglišče  $\mathbf{A}_1$ ). Krožni lok, ki pripada stranici pravilnega 15-kotnika, je enak razlike krožnih lokov med  $2/5$  pravilnemu 5-kotniku očrtane krožnice in  $1/3$  enakostraničnemu 3-kotniku očrtane krožnice.

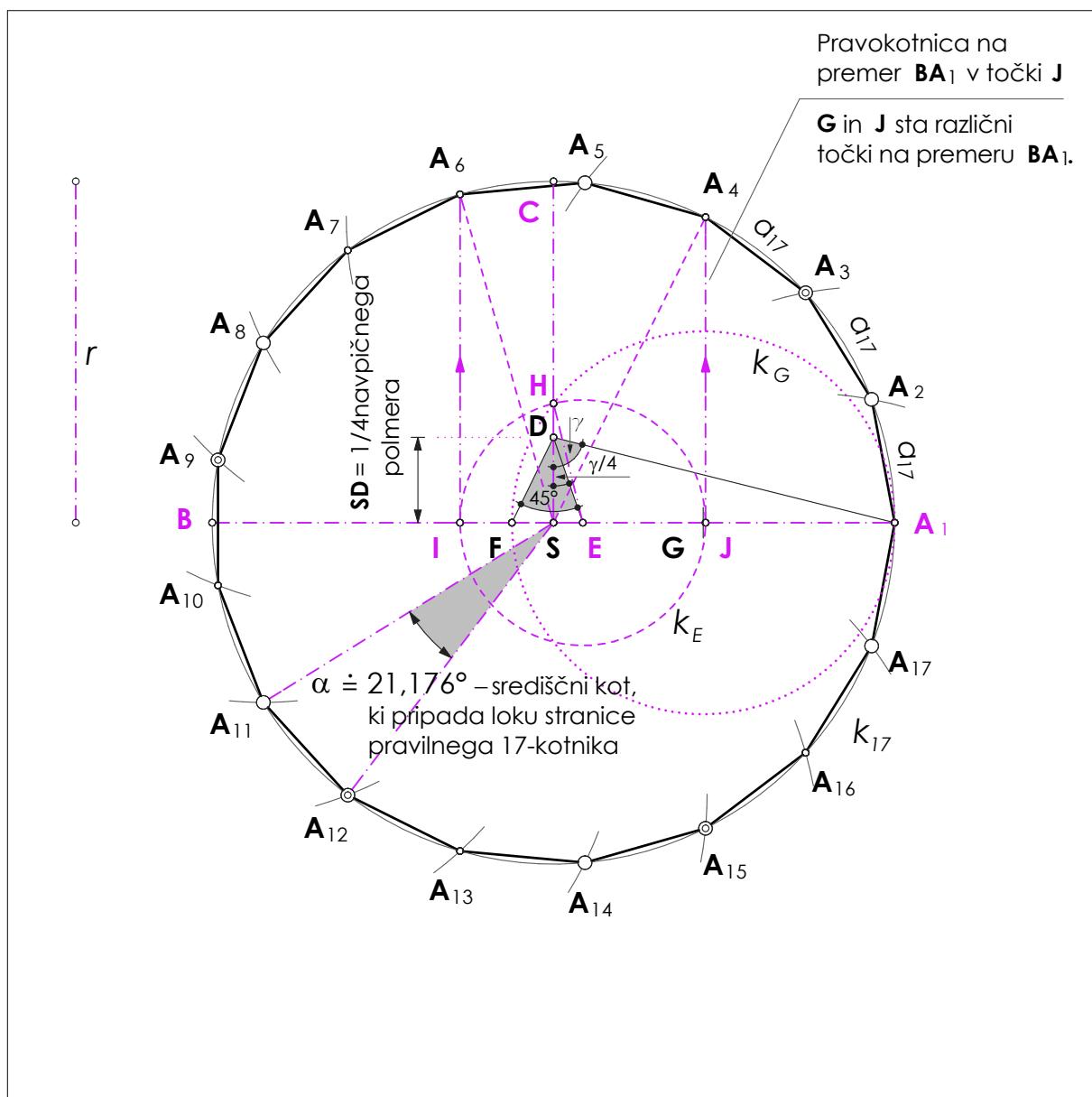
$$\frac{2}{5} \text{ očrt. krožnice 5-kotn.} - \frac{1}{3} \text{ očrt. krožnice 3-kotn.} = \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15} \text{ očrt. krožnice 15-kotn.}$$

Dolžina tetine, ki pripada krožnemu loku  $\mathbf{B}_3\mathbf{D}_5$ , je enaka stranici pravilnega 15-kotnika, ki jo nanašamo kot tetivo na krožnico. Velja tudi, da je dolžina tetine  $\mathbf{E}_5\mathbf{C}_3$  enaka stranici pravilnega 15-kotnika.

## 4.18 Pravilni sedemnajstkotnik

Zanimivost:

Konstrukcijo za pravilni 17-kotnik je odkril Carl Friedrich Gauss leta 1796 (po več kot 2000 letih neuspešnega iskanja matematikov), ko je bil star komaj 19 let.



Narišemo očrtani krog  $k_{17}$  z danim polmerom  $r$ . Skozi središče  $S$  narišemo premer  $BA_1$  in na ta premer pravokotni polmer  $SC$ .

Točka  $D$ : Točko  $D$  na polmeru  $SC$  določimo tako, da je razdalja  $SD$  enaka  $1/4$  polmera  $SC$ . Zvezemo točki  $D$  in  $A_1$  z daljico.

Točka **E**: Na polmeru **SA<sub>1</sub>** določimo točko **E** tako, da je kot **SDE** enak 1/4 kota **SDA<sub>1</sub>**.

Točka **F**: Na premeru **BA<sub>1</sub>** določimo točko **F** tako, da je kot **FDE** enak kotu  $45^\circ$ .

Točki **G** in **H**: Razpolovimo daljico **FA<sub>1</sub>**, da dobimo središče **G** krožnice **k<sub>G</sub>**, ki jo narišemo skozi točki **F** in **A<sub>1</sub>**. Krožnica **k<sub>G</sub>** seka polmer **SC** v točki **H**.

Točki **I** in **J**: Skozi točko **H** narišemo krožnico **k<sub>E</sub>** s središčem v točki **E**. Krožnica **k<sub>E</sub>** seka premer **BA<sub>1</sub>** v točkah **I** in **J**.

Oglišča **A<sub>1</sub>**, **A<sub>4</sub>** in **A<sub>6</sub>**: V točkah **I** in **J** narišemo pravokotnici na premer **BA<sub>1</sub>**.

Pravokotnici sekata pravilnemu 17-kotniku očrtano krožnico **k<sub>17</sub>** v presečiščih **A<sub>4</sub>** in **A<sub>6</sub>**.

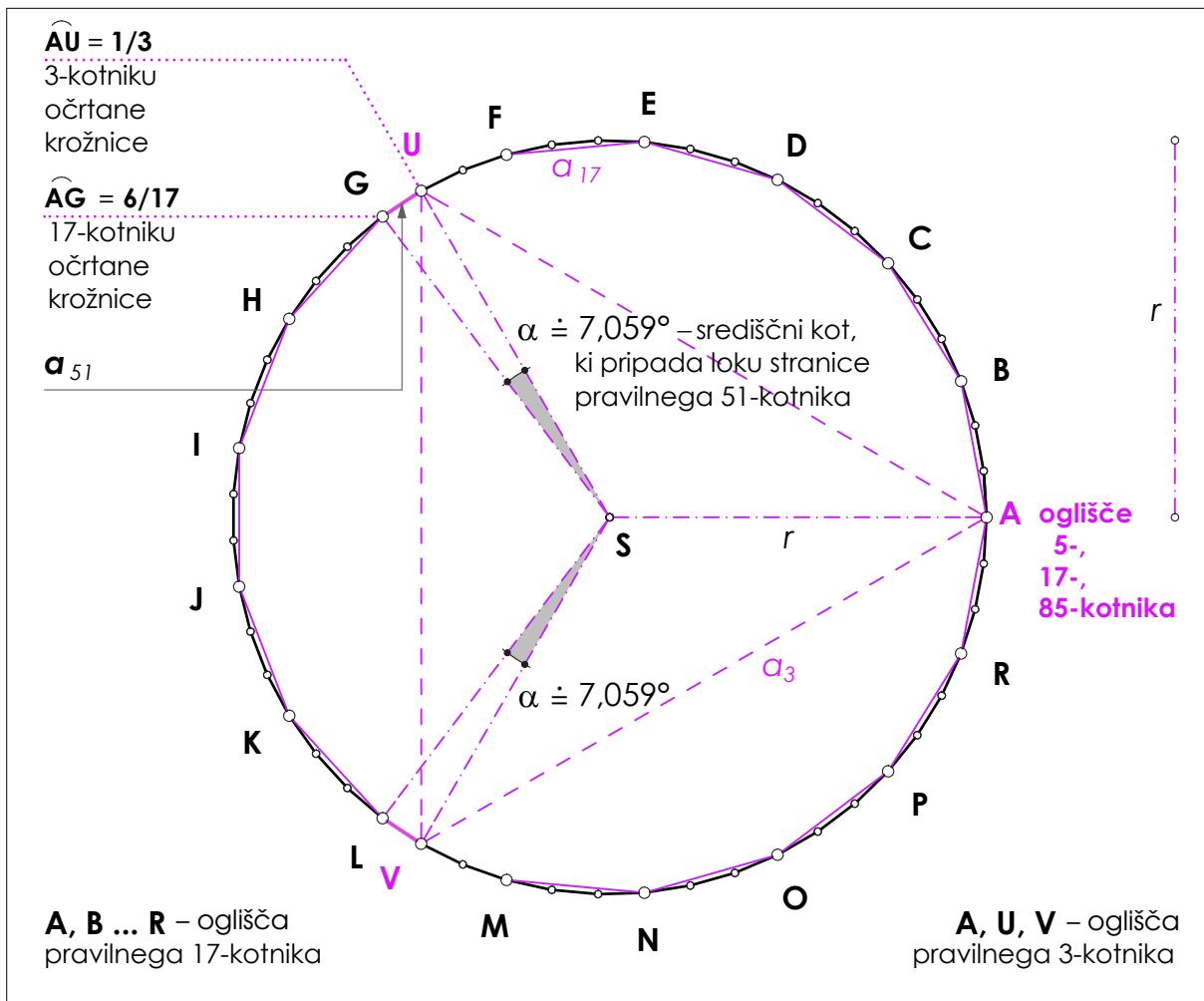
Krožni lok **A<sub>1</sub>A<sub>4</sub>** je enak 3/17 pravilnemu 17-kotniku očrtane krožnice, krožni lok **A<sub>4</sub>A<sub>6</sub>** pa je enak 2/17 pravilnemu 17-kotniku očrtane krožnice. Točke **A<sub>1</sub>**, **A<sub>4</sub>** in **A<sub>6</sub>** so oglišča pravilnega 17-kotnika.

Preostala oglišča pravilnega 17-kotnika lahko dobimo na več načinov:

1. način: Razpolovimo krožni lok **A<sub>4</sub>A<sub>6</sub>**, da dobimo krožna loka **A<sub>4</sub>A<sub>5</sub>** in **A<sub>5</sub>A<sub>6</sub>**. Krožna loka merita po 1/17 pravilnemu 17-kotniku očrtane krožnice. Dolžina tetive **A<sub>4</sub>A<sub>5</sub>** je enaka stranici pravilnega 17-kotnika, ki jo nanašamo kot tetivo na krožnico.

2. način: Oglejmo si še nekoliko drugačen način. Če nanašamo dolžino tetine **A<sub>1</sub>A<sub>4</sub>** na krožnico iz oglišča **A<sub>4</sub>**, dobimo oglišča **A<sub>7</sub>**, **A<sub>10</sub>**, **A<sub>13</sub>**, **A<sub>16</sub>** in **A<sub>2</sub>**. Če postopek nadaljujemo in nanašamo dolžino tetine **A<sub>1</sub>A<sub>4</sub>** iz oglišča **A<sub>2</sub>**, dobimo oglišča **A<sub>5</sub>**, **A<sub>8</sub>**, **A<sub>11</sub>**, **A<sub>14</sub>** in **A<sub>17</sub>**. Nato ponovimo postopek nanašanja tetine **A<sub>1</sub>A<sub>4</sub>** iz oglišča **A<sub>17</sub>**, da dobimo še preostala oglišča **A<sub>3</sub>**, **A<sub>6</sub>**, **A<sub>9</sub>**, **A<sub>12</sub>** in **A<sub>15</sub>**.

#### 4.19 Pravilni enainpetdesetkotnik



Stranico pravilnega 51-kotnika dobimo s prekrivanjem pravilnega 17-kotnika z enakostraničnim 3-kotnikom.

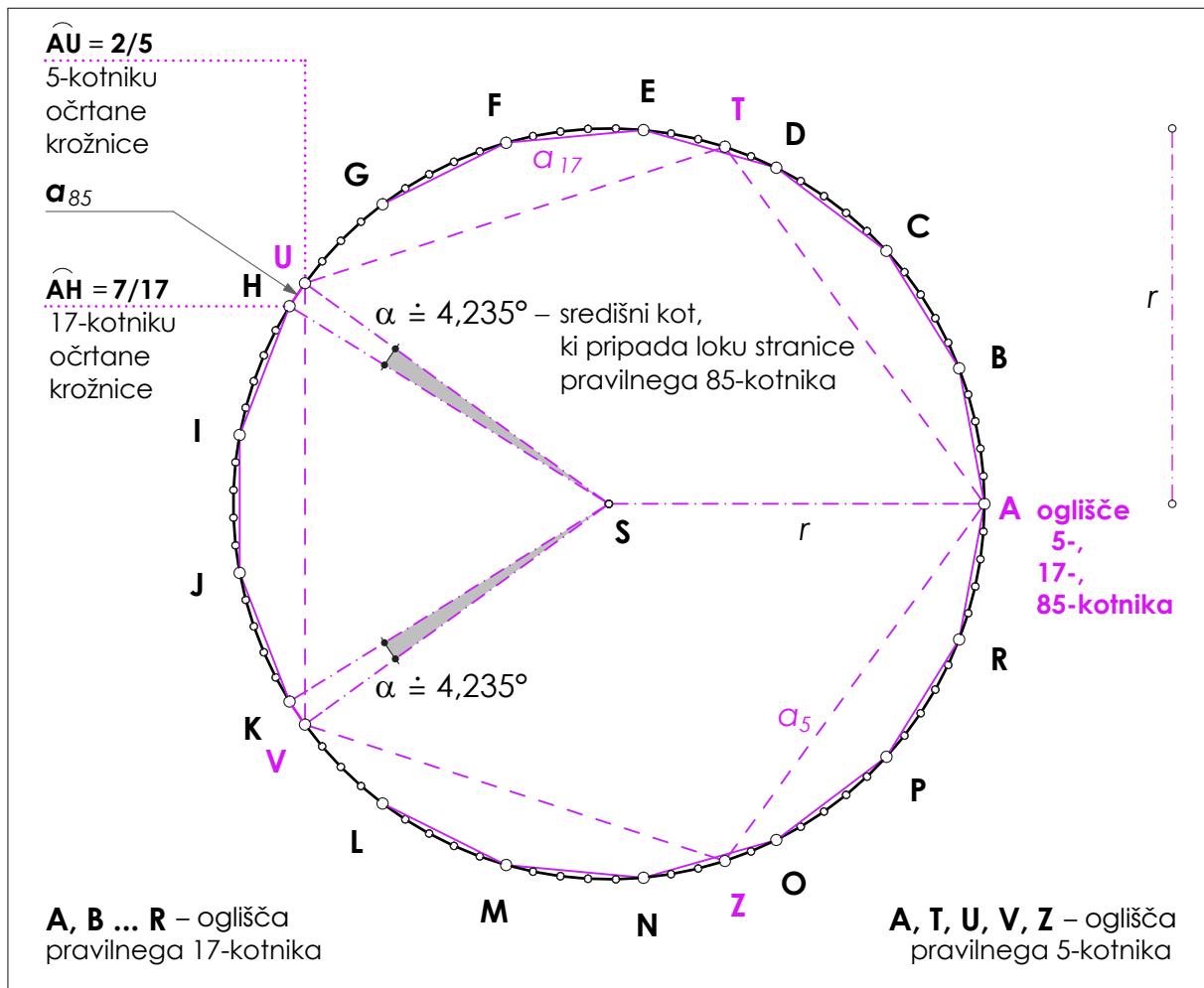
V očrtanem krogu z danim polmerom  $r$  narišemo pravilni 17-kotnik in enakostranični 3-kotnik z enim skupnim ogliščem (tukaj oglišče **A**). Krožni lok, ki pripada stranici pravilnega 51-kotnika, je enak razlike krožnih lokov med  $6/17$  pravilnemu 17-kotniku očrtane krožnice in  $1/3$  enakostraničnemu 3-kotniku očrtane krožnice.

$$\frac{6}{17} \text{ očrt. krožnice 17-kotn.} - \frac{1}{3} \text{ očrt. krožnice 3-kotn.} = \frac{18}{51} - \frac{17}{51} = \frac{1}{51} \text{ očrt. krožnice 51-kotn.}$$

Dolžina tetine, ki pripada krožnem lokom **GU**, je enaka dolžini stranice pravilnega 51-kotnika, ki jo nanašamo kot tetivo na krožnico. Velja tudi, da je dolžina tetine **LV** enaka dolžini stranice pravilnega 51-kotnika.

Če se število stranic v pravilnem mnogokotniku poveča pri enakem polmeru očrtanega kroga, se dolžina stranic ustrezeno zmanjša. Ko se število stranic ne-skončno poveča, stranice preidejo v točke, pravilni mnogokotnik pa preide v krožnico z danim polmerom.

#### 4.20 Pravilni petinosemdesetkotnik



Stranico pravilnega 85-kotnika dobimo s prekrivanjem pravilnega 17-kotnika s pravilnim 5-kotnikom.

V očrtanem krogu z danim polmerom  $r$  narišemo pravilni 17-kotnik in pravilni 5-kotnik s skupnim oglisčem (tukaj oglisče **A**). Krožni lok, ki pripada stranici pravilnega 85-kotnika, je enak razlike krožnih lokov med 7/17 pravilnemu 17-kotniku očrtane krožnice in 2/5 pravilnemu 5-kotniku očrtane krožnice.

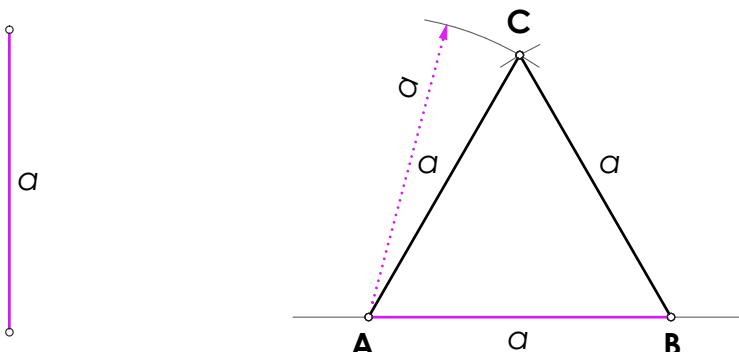
$$\frac{7}{17} \text{ očrt. krožnice 17-kotn.} - \frac{2}{5} \text{ očrt. krožnice 5-kotn.} = \frac{35}{85} - \frac{34}{85} = \frac{1}{85} \text{ očrt. krožnice 85-kotn.}$$

Dolžina tetine, ki pripada krožnemu loku **HU**, je enaka dolžini stranice pravilnega 85-kotnika, ki jo nanašamo kot tetivo na krožnico. Velja tudi, da je dolžina tetine **KV** enaka dolžini stranice pravilnega 85-kotnika.

Če se število stranic v pravilnem mnogokotniku poveča pri enakem polmeru očrtanega kroga, se dolžina stranic ustrezno zmanjša. Ko se število stranic ne-skončno poveča, stranice preidejo v točke, pravilni mnogokotnik pa preide v krožnico z danim polmerom.

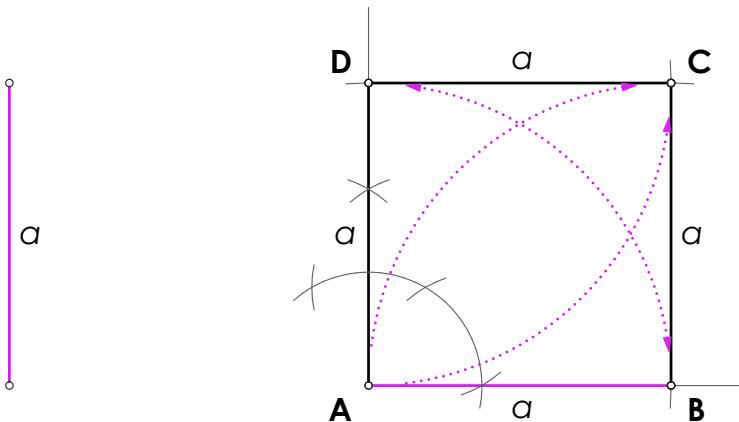
## 5 PRAVILNI MNOGOKOTNIK Z ZNANO STRANICO

### 5.1 Enakostranični trikotnik



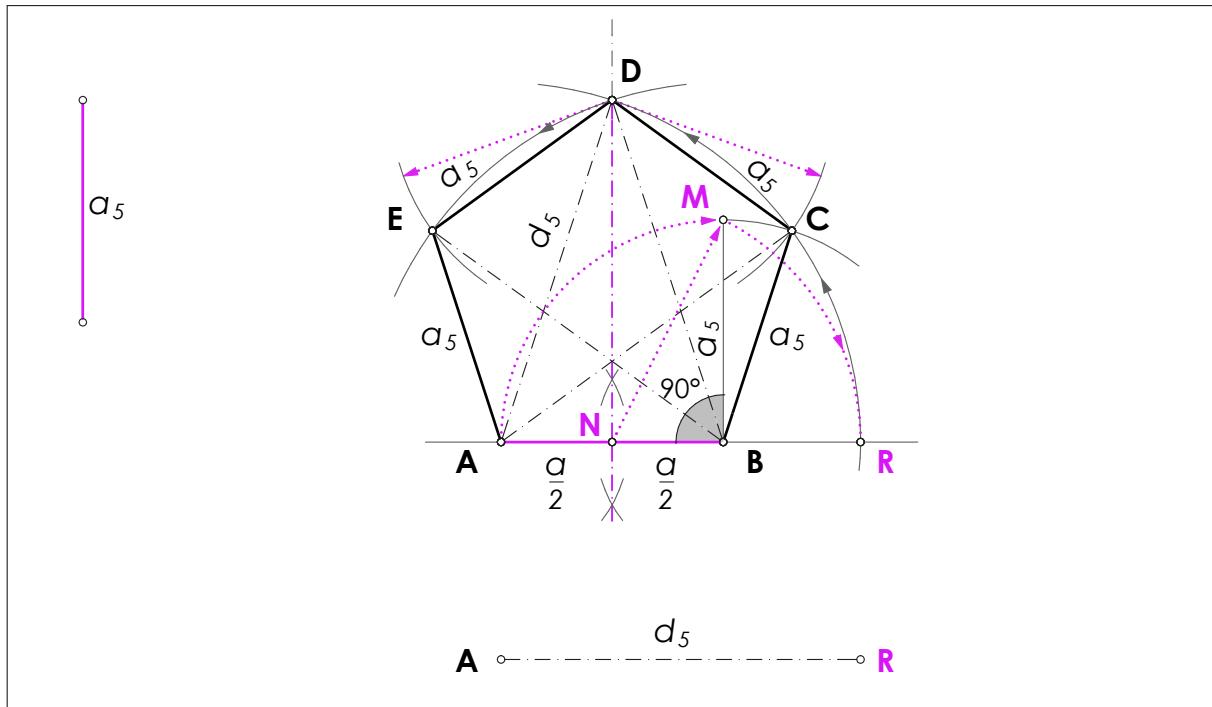
Narišemo premico in na njej odmerimo dolžino stranice  $a$ , kjer sta krajišči **A** in **B** že oglišči enakostraničnega trikotnika. Iz oglišč **A** in **B** narišemo krožna loka s polmerom dolžine stranice  $a$ . Presečišče obeh krožnih lokov je tretje oglišče **C** enakostraničnega trikotnika.

### 5.2 Kvadrat



Narišemo pravi kot, kjer je vrh **A** že oglišče kvadrata. Iz oglišča **A** odmerimo na obeh krakih dolžino stranice  $a$ , da dobimo oglišči **B** in **D**. Iz oglišč **B** in **D** narišemo krožna loka s polmerom dolžine stranice  $a$ . Presečišče obeh krožnih lokov je oglišče **C** kvadrata.

### 5.3 Pravilni petkotnik



*Konstrukcija diagonale pravilnega petkotnika:*

Za konstrukcijo pravilnega petkotnika z znano stranico potrebujemo pravo dolžino diagonale  $d_5$ . Pri konstrukciji diagonale upoštevamo lastnost pravilnega petkotnika, da sta dolžini diagonale in stranice pravilnega petkotnika v medsebojnem razmerju, ki ga imenujemo *zlati rez* (konstrukcija 1.9.2). Narišemo premico in na njej odmerimo dolžino stranice  $a$ , kjer sta krajišči **A** in **B** že oglišči pravilnega petkotnika. Nato narišemo sime-tralo stranice **AB**, da dobimo razpolovišče **N**. V oglišču **B** narišemo pravokotnico na stranico  $a$  in nanjo nanesemo dolžino stranice  $a$ , da dobimo točko **M**. Iz razpolovišča **N** narišemo krožni lok skozi točko **M** do premice, ki je nosilka stranice **AB**, da dobimo presečišče **R**. Dolžina daljice **AR** je enaka pravi dolžini diagonale  $d_5$  pravilnega pet-kotnika.

*Konstrukcija pravilnega petkotnika:*

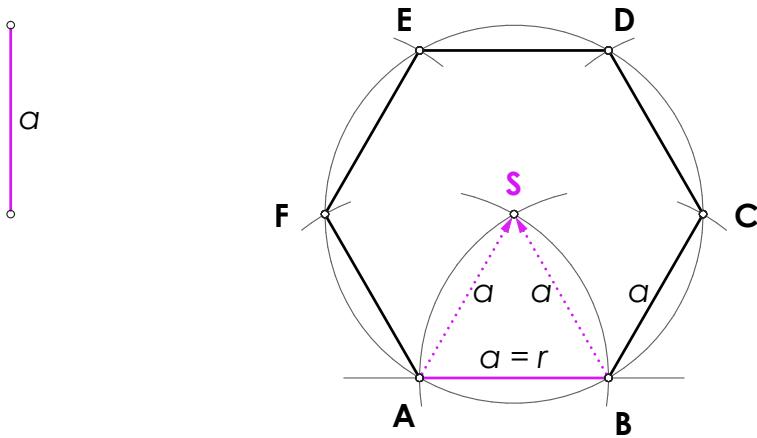
*Krajišči **A** in **B** stranice  $a$  sta že oglišči petkotnika.*

*Tretje oglišče **C**:* Iz oglišča **A** narišemo krožni lok s polmerom dolžine diagonale  $d_5$ , iz oglišča **B** pa narišemo krožni lok s polmerom dolžine stranice  $a$ . Krožna loka se sekata v tretjem oglišču **C**.

*Četrto oglišče **D**:* Iz oglišč **A** in **B** narišemo krožna loka s polmerom dolžine diagonale  $d_5$ . Krožna loka se sekata v četrtem oglišču **D**.

*Peto oglišče **E**:* Iz oglišča **B** narišemo krožni lok s polmerom dolžine diagonale  $d_5$ , iz oglišča **A** pa narišemo krožni lok s polmerom dolžine stranice  $a$ . Krožna loka se se-kata v petem oglišču **E**.

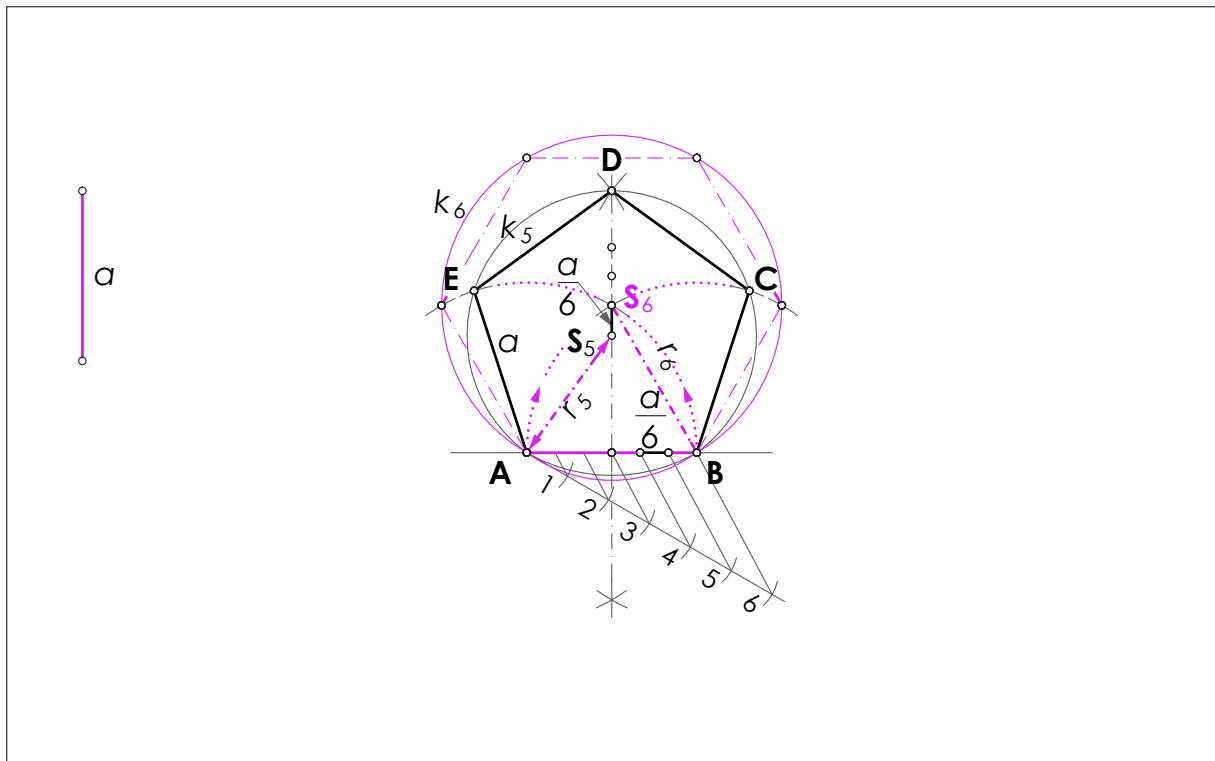
## 5.4 Pravilni šestkotnik



V pravilnem šestkotniku je dolžina stranice  $a$  enaka polmeru  $r$  očrtanega kroga.

Narišemo premico in na njej odmerimo dolžino stranice  $a$ , kjer sta krajišči **A** in **B** že oglišči pravilnega šestkotnika. Iz obeh oglišč narišemo krožna loka s polmerom  $r$ , ki je enak dolžini stranice  $a$ . Krožna loka se sekata v središču **S** očrtanega kroga pravilnega šestkotnika. Nato narišemo iz središča **S** očrtani krog skozi oglišči **A** in **B** ter nanašamo na krožnico dolžino stranice  $a$  kot tetivo.

## 5.5 Približna konstrukcija pravilnega petkotnika – splošni način

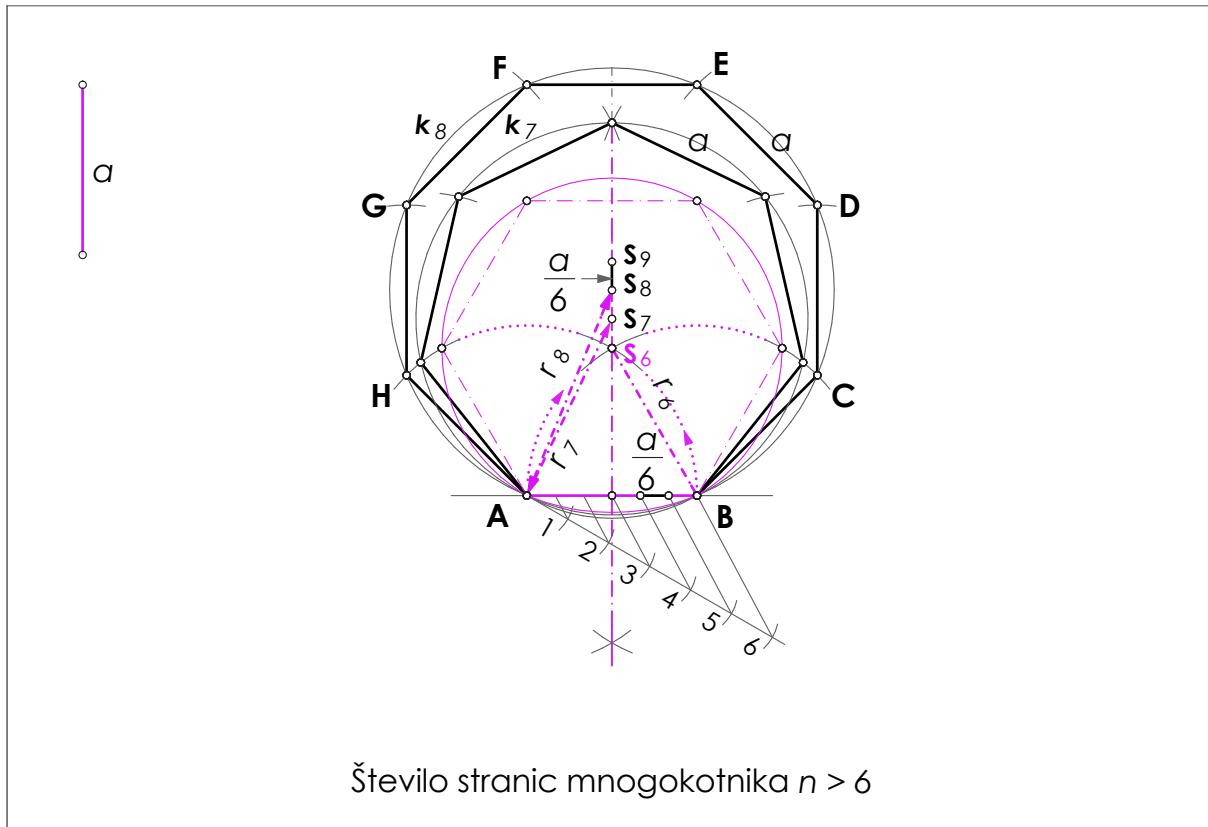


Narišemo premico in na njej odmerimo dolžino stranice  $a$ , kjer sta krajišči **A** in **B** že oglišči pravilnega petkotnika. Nato narišemo simetralo stranice **AB** in dočimo središče **S<sub>6</sub>** pravilnemu šestkotniku očrtanega kroga.

Središče **S<sub>5</sub>** pravilnemu petkotniku očrtanega kroga dobimo tako, da nanesemo eno šestino dane stranice  $a$  iz središča **S<sub>6</sub>** po simetrali navzdol. Polmer očrtanega kroga je enak dolžini daljice **S<sub>5</sub>A** in velja, da je dolžina daljice **S<sub>5</sub>A** enaka dolžini daljice **S<sub>5</sub>B**.

Iz središča **S<sub>5</sub>** narišemo skozi oglišči **A** in **B** pravilnemu petkotniku očrtani krog in nanašamo na krožnico **k<sub>5</sub>** dolžino stranice **AB** kot tetivo.

## 5.6 Približna konstrukcija pravilnega mnogokotnika, če je število stranic večje od 6 – splošni način



Narišemo premico in na njej odmerimo dolžino stranice **a**, kjer sta krajišči **A** in **B** že oglišči pravilnega  $n$ -kotnika. Nato narišemo simetralo stranice **AB** in določimo središče **S<sub>6</sub>** pravilnemu šestkotniku očrtanega kroga.

Središče **S<sub>7</sub>** pravilnemu sedemkotniku očrtanega kroga določimo tako, da nanesemo eno šestino dane stranice iz središča **S<sub>6</sub>** po simetrali navzgor. Polmer očrtanega kroga je enak dolžini daljice **S<sub>7</sub>A** in velja, da je dolžina daljice **S<sub>7</sub>A** enaka dolžini daljice **S<sub>7</sub>B**.

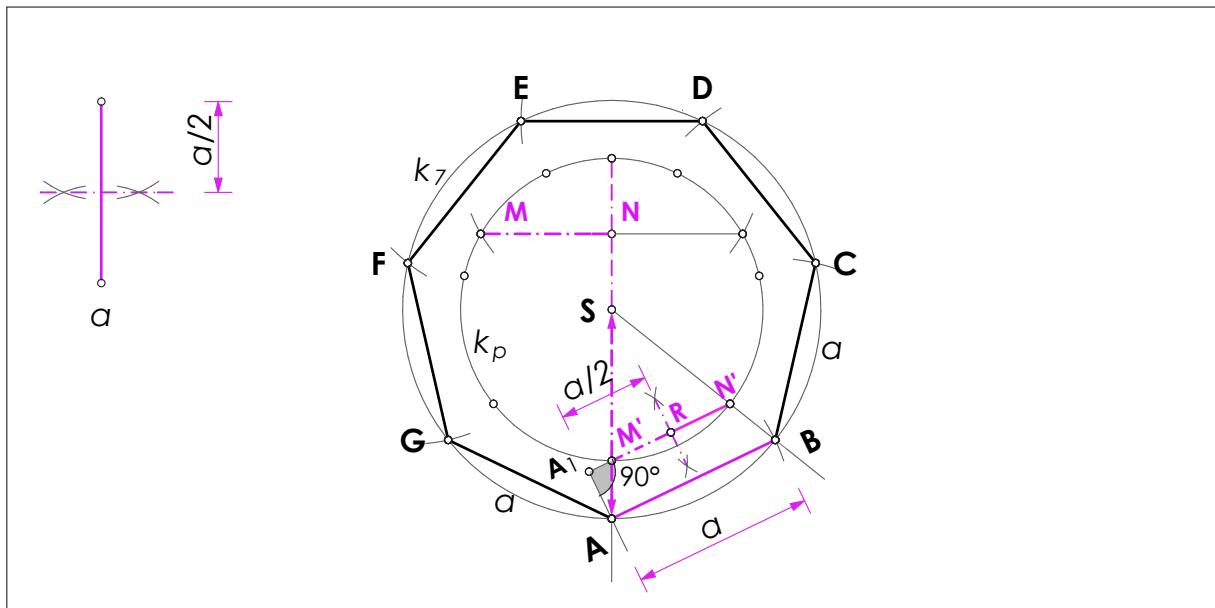
Središče **S<sub>8</sub>** pravilnemu osemkotniku očrtanega kroga določimo tako, da nenesemo dve šestini dane stranice iz središča **S<sub>6</sub>** po simetrali navzgor. Polmer očrtanega kroga je enak dolžini daljice **S<sub>8</sub>A** in velja, da je dolžina daljice **S<sub>8</sub>A** enaka dolžini daljice **S<sub>8</sub>B**.

Tako določimo središče **S<sub>n</sub>** očrtanega kroga poljubnemu pravilnemu mnogokotniku z znano stranico **a**.

Iz ustreznega središča **S<sub>n</sub>** narišemo skozi oglišči **A** in **B** pravilnemu  $n$ -kotniku očrtani krog in nanašamo na krožnico **k<sub>n</sub>** dolžino stranice **AB** kot tetivo.

## 5.7 Konstrukcija pravilnega mnogokotnika z znano stranico z upoštevanjem pravil podobnosti – splošni način

Po tej metodi uporabljamo pri konstruiranju pravilnih mnogokotnikov pravila o podobnih trikotnikih.



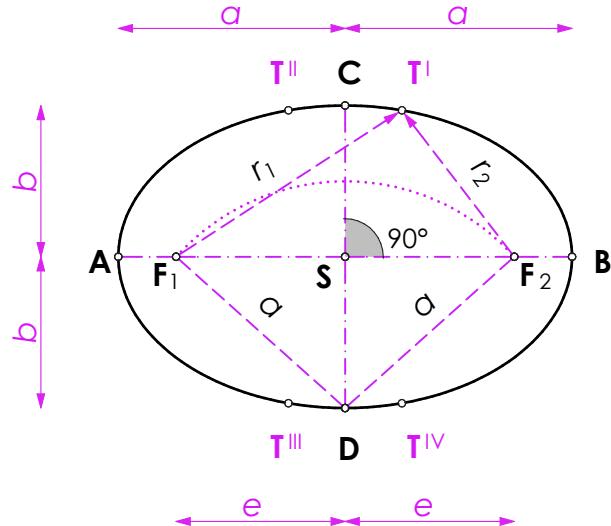
Slika prikazuje, kako narišemo pravilni sedemkotnik, če je znana stranica  $a$ .

**Konstrukcija polmera očrtanega kroga  $k_7$ , če je znana stranica:** V pomožnem očrtanem krogu  $k_p$  s poljubnim polmerom določimo dolžino pomožne stranice **MN** pravilnega sedemkotnika in jo nanesemo kot tetivo na pomožno krožnico  $k_p$ , da dobimo oglišči **M**' in **N**'. Skozi središče **S** ter točki **M**' in **N**' narišemo središčna poltraka **SM**' in **SN**'. Pomožno stranico **MN**' razpolovimo, da dobimo razpolovišče **R**. Nato nanesemo na pomožno stranico iz razpolovišča **R** dolžino ene polovice dane stranice **AB**, da dobimo točko **A**\_1. V točki **A**\_1 narišemo pravokotnico na daljico **A**\_1**N**'. Ta seka poltrak **SM**' v presečišču **A**, ki je že oglišče iskanega pravilnega sedemkotnika. Dolžina daljice **SA** je enaka polmeru očrtanega kroga  $k_7$  iskanega pravilnega sedemkotnika z znano stranico  $a$ .

**Risanje pravilnega sedemkotnika z dano stranico:** Iz središča **S** narišemo skozi oglišče stranice **A** pravilnemu sedemkotniku očrtani krog in nanašamo na krožnico  $k_7$  dolžino stranice **AB** kot tetivo.

## 6 ELIPSA

### 6.1 Oznake pri elipsi



**Definicija:** Elipsa je množica točk v ravni, katerih vsota razdalj od dveh stalnih točk (gorišč) je konstantna in enaka veliki osi elipse.

**S** ..... središče elipse

**F<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>** ..... gorišči (žarišči ali fokusa)

**A, B** ..... glavni temeni

**C, D** ..... stranski temeni

**a = |SA| = |SB|** ..... velika polos

**b = |SC| = |SD|** ..... mala polos

**2a = |AB|** ..... Velika os **AB** je največji premer elipse.

**2b = |CD|** ..... Mala os **CD** je najmanjši premer elipse.

**AB ⊥ CD** ..... Velika in mala os sta med seboj pravokotni in se v središču razpolavlja.

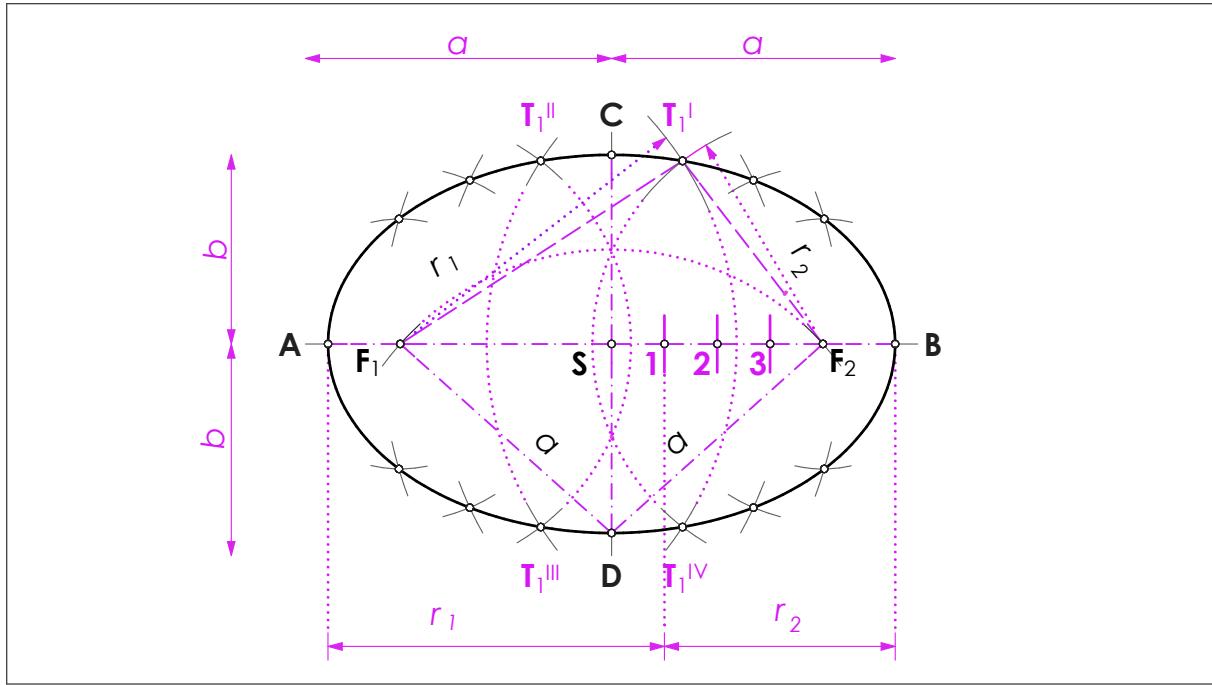
**e = |SF<sub>1</sub>| = |SF<sub>2</sub>|** ..... linearna ekscentričnost – razdalja gorišča od središča

**r<sub>1</sub> = |F<sub>1</sub>T|** ..... prevodnica ali radijvektor – razdalja točke **T** na elipsi od gorišča **F<sub>1</sub>**

**r<sub>2</sub> = |F<sub>2</sub>T|** ..... prevodnica ali radijvektor – razdalja točke **T** na elipsi od gorišča **F<sub>2</sub>**

**r<sub>1</sub> + r<sub>2</sub> = 2a** ..... Vsota razdalj točke na elipsi od obeh gorišč je konstantna in je enaka veliki osi elipse.

## 6.2 Načrtovanje elipse po definiciji



Pri konstruiranju elipse upoštevamo definicijo elipse, da je vsota razdalj (*prevodnic*)  $r_1$  in  $r_2$  za vsako točko elipse od dveh stalnih točk (*gorišč*) konstantna in enaka veliki osi elipse ( $r_1 + r_2 = 2a$ ).

*Dani sta velika polos **a** in mala polos **b** elipse.*

*Risanje osi elipse:* Narišemo veliko os z dano dolžino  $2a$ , kjer sta točki **A** in **B** glavni temeni, ter malo os z dano dolžino  $2b$ , kjer sta točki **C** in **D** stranski temeni. Velika in mala os sta med seboj pravokotni in se med seboj razpolavlja v središču **S**.

*Določanje gorišč elipse, če sta dani velika in mala os elipse:* Iz enega izmed temen na mali osi elipse (tukaj iz temena **D**) narišemo krožni lok s polmerom dolžine velike polosi **a**. Ta krožni lok seka veliko os v točkah **F<sub>1</sub>** in **F<sub>2</sub>**. Točki **F<sub>1</sub>** in **F<sub>2</sub>** imenujemo gorišči elipse.

*Določanje točk elipse:* Na veliki osi elipse izberemo nekaj poljubnih točk (**1**, **2**, **3** ...) med središčem **S** in enim goriščem (tukaj med središčem **S** in goriščem **F<sub>2</sub>**). V šestilo vzamemo razdaljo  $r_1$  (od temena **A** do točke **1**) in narišemo iz gorišč **F<sub>1</sub>** in **F<sub>2</sub>** krožna loka s tem polmerom. Nato narišemo iz obeh gorišč še krožna loka s polmerom  $r_2$  (od točke **1** do temena **B**). Presečišča krožnih lokov  $r_1$  in  $r_2$  nam dajo štiri točke elipse (na sliki so označene s **T<sub>1I</sub>**, **T<sub>1II</sub>**, **T<sub>1III</sub>** in **T<sub>1IV</sub>**).

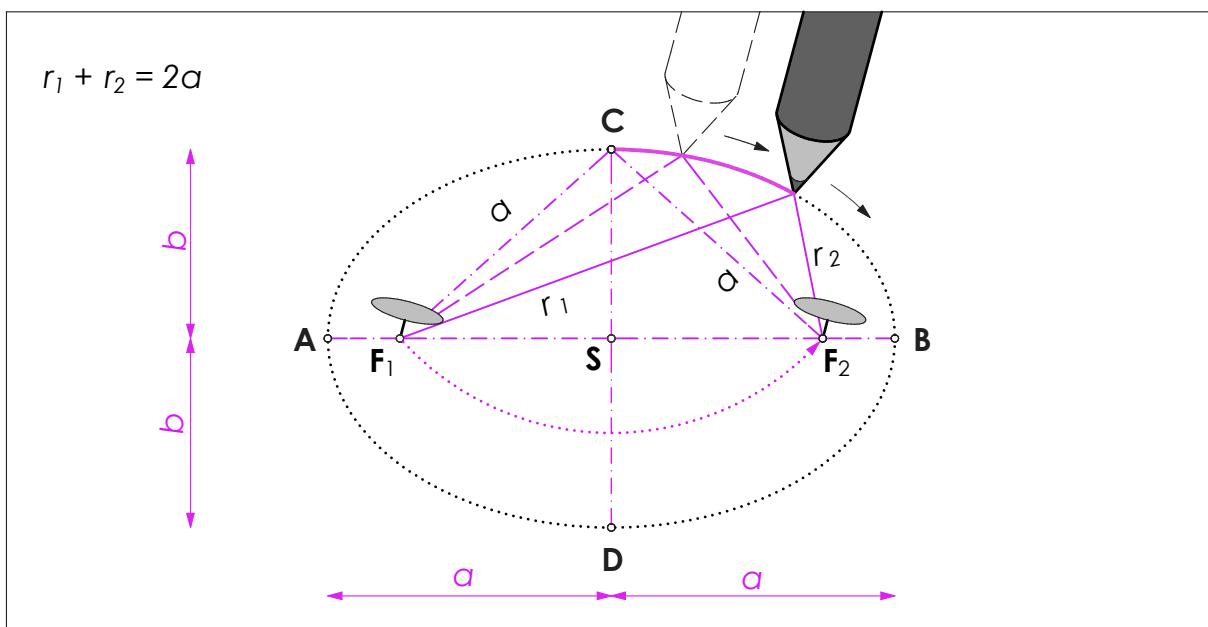
Ta postopek ponovimo s prevodnicami, ki imajo dolžine od temena **A** do toček **2** in **3** ter od točk **2** in **3** do temena **B**. Presečišča ustreznih krožnih lokov določijo nove točke elipse. Če smo izbrali več točk na veliki osi, postopek še ponovimo.

*Risanje elipse:* Tako dobljene točke s krivuljnikom povežemo med seboj in s temeni v napeto in gladko krivuljo elipse.

### 6.3 Načrtovanje elipse na osnovi »vrtnarske metode«

Pri vrtnarski metodi so uporabljeni risarski elementi konstrukcije elipse po definiciji. Pri delu potrebujemo daljšo ošiljeno palico in vrvico, ki je enaka dolžini grede (tukaj velikemu premeru  $2a$  elipse) in ima na koncih zavezana manjša ošiljena količka.

*Gredo eliptične oblike oblikujemo takole:* V zemljo zarežemo z ošiljeno palico ob letvi veliko os elipse (veliki premer  $2a$  elipse), ki je enaka dolžini grede. Na sredini te razdalje označimo pravokotno še malo os (mali premer  $2b$  elipse), ki je enaka širini grede. Nato določimo na velikem premeru mesti za količka (gorišči elipse). V enega izmed krajišč malega premera grede zabijemo ošiljeno palico, jo objamemo z vrvično zanko, ki je enaka polovici dolžine velikega premera grede, in okoli palice zarišemo krožni lok preko velikega premera grede. Presečišči krožnega loka z velikim premerom sta gorišči elipse. Sedaj zabijemo količka, ki sta na koncih vrvice, v ti dve »gorišči«. Nato zataknemo ošiljeno pallico za vrvico in se pomikamo z napeto zanko v roki okoli obeh količkov ter zarežemo v zemljo brazdo, ki ima obliko krivulje elipse.

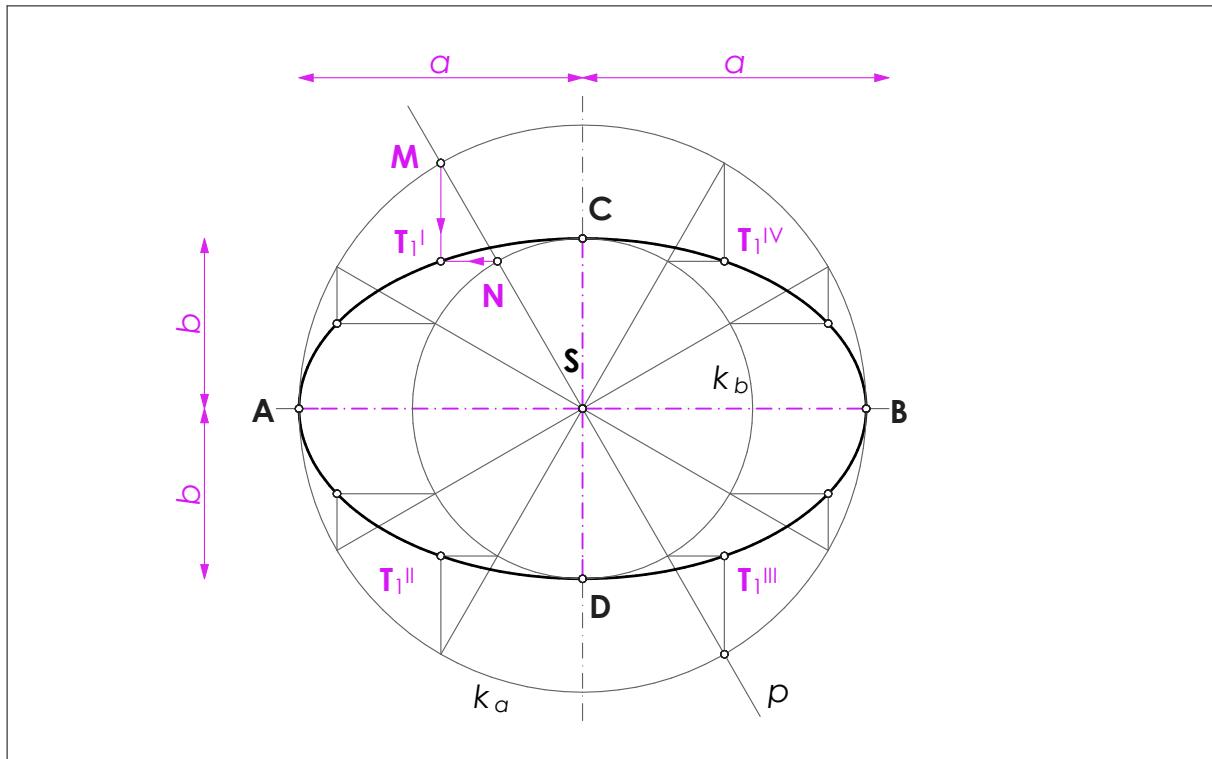


Slika 1

Na osnovi te metode lahko narišemo elipso na risalnem listu brez pomoči krikuljnika.

Najprej narišemo veliko in malo os ter določimo gorišči (konstrukcija 6.2). V gorišči zabodemo risalna žeblička in zanju zataknemo nitko močnejšega sukanca. Čista dolžina nitke med žebličkoma je enaka veliki osi. S svinčnikom, ki je zataknjen za napeto nitko sukanca, drsimo okoli risalnih žebličkov in narišemo elipso (slika 1).

#### 6.4 Načrtovanje elipse s pomočjo velike in male krožnice



Dani sta velika polos **a** in mala polos **b** elipse.

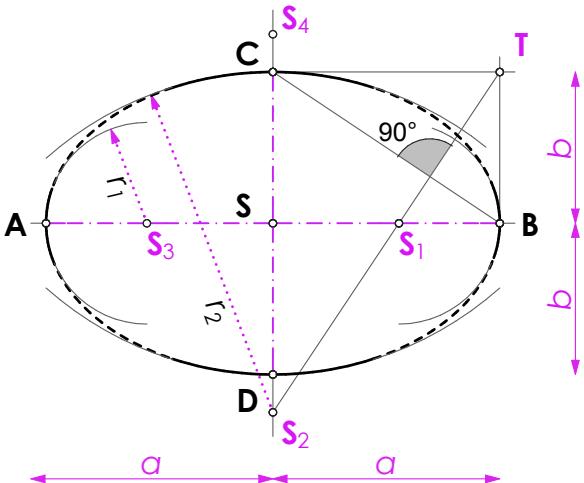
**Konstrukcija osi elipse:** Najprej narišemo veliko in malo os elipse z danimi podatki (konstrukcija 6.2).

**Določanje točk elipse:** Iz središča **S** elipse narišemo veliko krožnico  $k_a$  s polmerom, ki je enak dolžini velike polosi **a** in malo krožnico  $k_b$  s polmerom, ki je enak dolžini male polosi **b**.

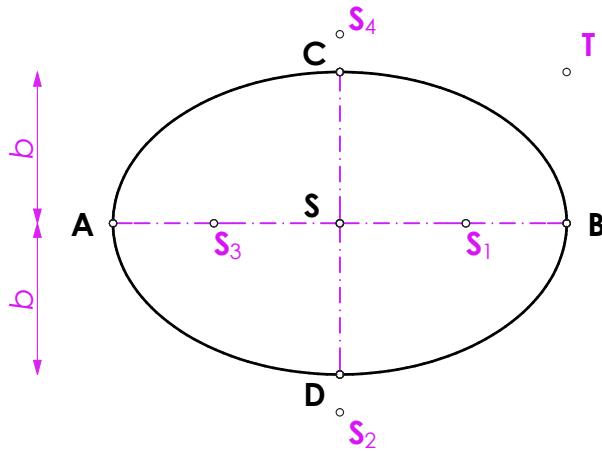
Skozi središče **S** elipse narišemo poljubno premico **p**, ki preseka veliko in malo krožnico v točkah **M** in **N**. Iz točke **M** na veliki krožnici narišemo vzporednico mali osi, iz točke **N** na mali krožnici pa narišemo vzporednico veliki osi. Obe vzporednici se sekata v točki **T<sub>1I</sub>**, ki je že točka elipse. Če narišemo skozi središče elipse več premic, dobimo na ta način poljubno število točk elipse. Pri tem izkoristimo še osno simetričnost elipse in že določenim točkam narišemo še njihove simetrične točke glede na obe osi.

**Risanje elipse:** Tako dobljene točke s krivuljnikom povežemo med seboj in s temeni v napeto in gladko krivuljo elipse.

## 6.5 Načrtovanje elipse s temenskimi pritisnjeniimi krožnimi lokovi



Slika 1: Določanje središč temenskih pritisnjenihi krožnih lokov



Slika 2: Krivulja elipse

*Temenski pritisnjeni krožni loki* so deli pritisnjениh krogov, ki imajo središča na oseh elipse oziroma njihovih podaljških in se v okolici temen ustrezno prilegajo krivulji elipse.

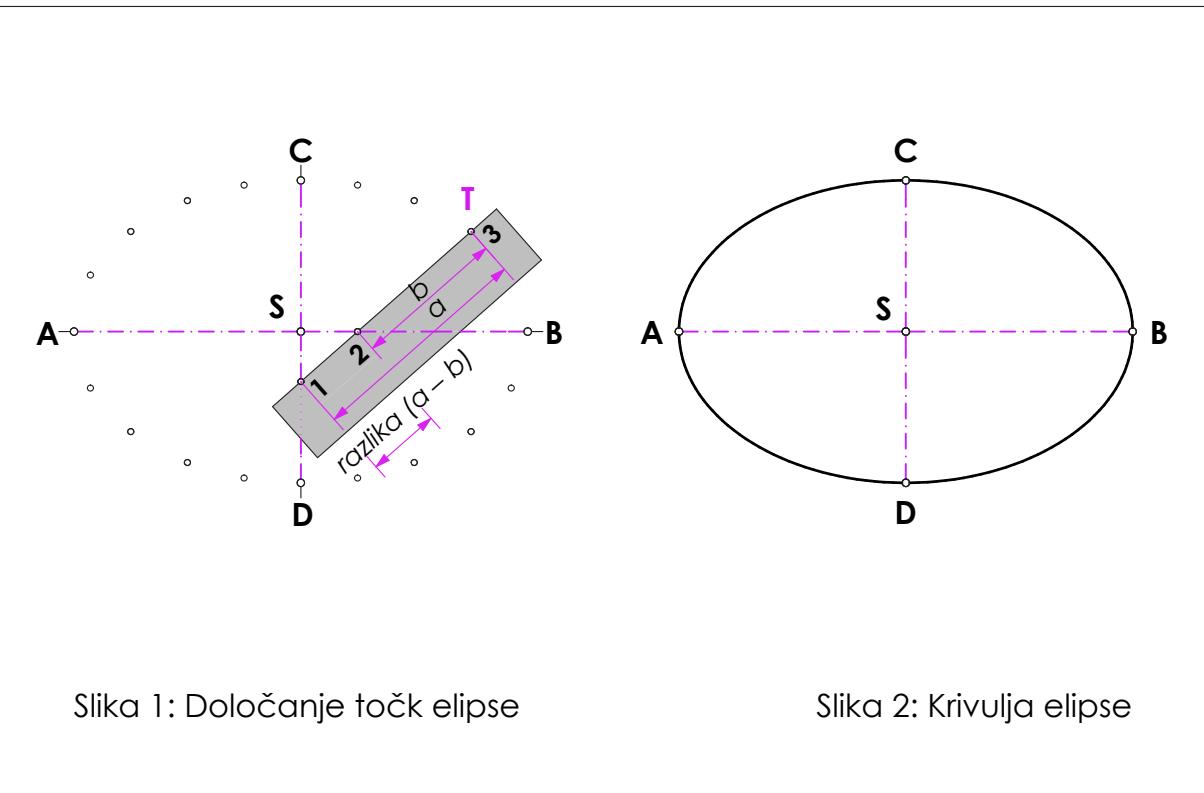
Dani sta velika polos **a** in mala polos **b** elipse.

Konstrukcija osi elipse: Narišemo veliko in malo os elipse (konstrukcija 6.2).

Določanje središč **S<sub>1</sub>** in **S<sub>2</sub>** pritisnjenihi krožnih lokov v temenih: Skozi teme na veliki osi (tukaj skozi **B**) narišemo vzporednico mali osi, skozi teme na mali osi (tukaj skozi **C**) pa vzporednico veliki osi. Obe vzporednici se sekata v točki **T**. V pravokotniku **SBTC** narišemo diagonalo **BC**, ki poteka skozi temeni elipse **B** in **C**. Iz oglišča **T** narišemo pravokotnico na diagonalo **BC**, ki seka veliko in malo os v središčih **S<sub>1</sub>** in **S<sub>2</sub>**. Središči **S<sub>1</sub>** in **S<sub>2</sub>** sta središči temenskih pritisnjenihi krožnih lokov v temenih **B** in **C**. Središči **S<sub>3</sub>** in **S<sub>4</sub>** dobimo z zrcaljenjem središč **S<sub>1</sub>** in **S<sub>2</sub>** čez središče **S** elipse (slika 1).

Risanje elipse: Če iz središč **S<sub>1</sub>**, **S<sub>2</sub>**, **S<sub>3</sub>** in **S<sub>4</sub>** narišemo ustrezne temenske pritisnjene krožne loke skozi temena elipse **A**, **B**, **C** in **D**, dobimo krivinske loke, ki jih s krivuljnikom spojimo v napeto in gladko krivuljo elipse (slika 2).

## 6.6 Načrtovanje elipse s papirnim trakom



Dani sta velika polos  $a$  in mala polos  $b$  elipse.

*Konstrukcija osi elipse:* Narišemo veliko in malo os elipse (konstrukcija 6.2).

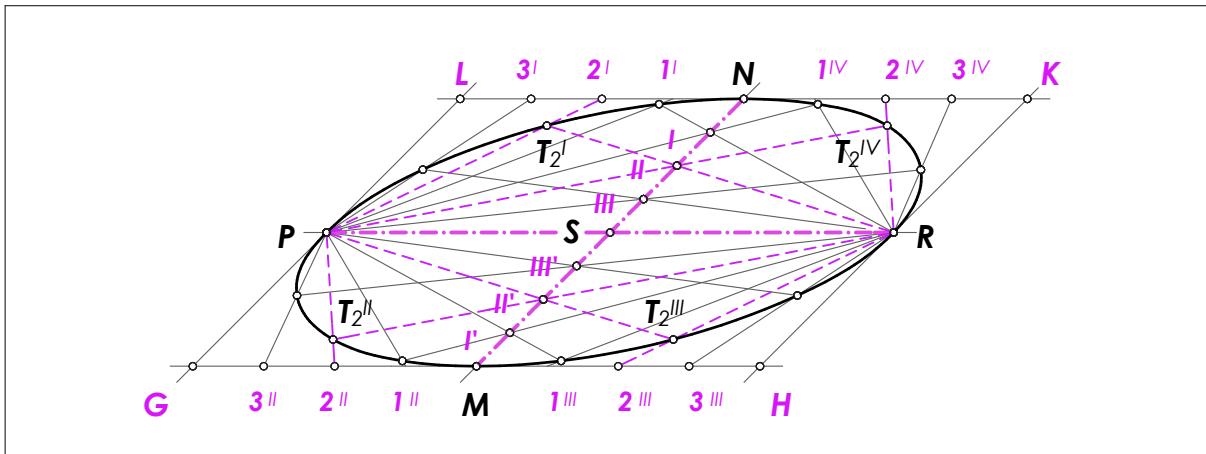
*Določanje točk elipse s papirnim trakom:* Na ravnom odrezku papirja odmerimo dolžini polosi elipse  $a$  in  $b$  in ju označimo, kakor je prikazano na sliki 1.

- |         |           |                       |
|---------|-----------|-----------------------|
| (1 – 3) | $a$       | polovica velike osi   |
| (2 – 3) | $b$       | polovica male osi     |
| (1 – 2) | $(a - b)$ | razlika dolžin polosi |

Če postavimo papirni trak tako, da je točka 1 na mali osi, točka 2 pa na veliki osi, je točka 3 že točka elipse. S premikanjem papirnega traku na način, da se ob premikanju dotika točka 1 samo male osi, točka 2 pa samo velike osi, določimo s točko 3 poljubno število točk elipse (slika 1). Tako določene točke elipse spojimo s krivuljnikom v napeto in gladko krivuljo elipse (slika 2).

## 6.7 Elipsa je dana s konjugiranimi premeroma

Vsako dvojico premerov, pri katerih sta tangenti v krajiščih enega premera vzporedni drugemu premeru, imenujemo *konjugirana ali pripojena premera*. Konjugirana premera se v središču **S** elipse razpolavlja.



Dana sta konjugirana premera **MN** in **PR**.

*Določanje točk elipse:* Skozi krajišča **M**, **N**, **P** in **R** narišemo tangente, ki so vzporedne danima konjugiranim premeroma **MN** in **PR**. Dobimo očrtani paralelogram **GHKL**. Daljice **SM**, **SN**, **MG**, **MH**, **NL** in **NK** razdelimo na enako število delov (tukaj so razdeljene na štiri ustrezno enake dele – konstrukcija 1.7). Delišča označimo od točk **M** in **N** na levo in na desno stran ter proti središču **S** elipse. Delišča so označena tako, da narišemo ustrezne dvojice poltrakov vedno skozi delišča, ki imajo enako številčno vrednost. Da določimo točko elipse, poiščemo presečišče poltrakov, ki izhaja iz enega krajišča konjugiranega premera **PR** do ustreznega delišča na stranicah **GH** in **LK** očrtanega paralelograma, ter poltraka, ki izhaja iz drugega krajišča istega premera **PR** skozi ustrezno delišče na drugem konjugiranem premeru **MN** do presečišča s prvim poltrakom.

- T<sub>2</sub><sup>I</sup>:** Povežemo točki **P** in **2<sup>I</sup>** ter točki **R** in **II** s poltrakoma, ki se sekata v točki **T<sub>2</sub><sup>I</sup>** elipse.
- T<sub>2</sub><sup>II</sup>:** Povežemo točki **P** in **2<sup>II</sup>** ter točki **R** in **II'** s poltrakoma, ki se sekata v točki **T<sub>2</sub><sup>II</sup>** elipse.
- T<sub>2</sub><sup>III</sup>:** Povežemo točki **R** in **2<sup>III</sup>** ter točki **P** in **II'** s poltrakoma, ki se sekata v točki **T<sub>2</sub><sup>III</sup>** elipse.
- T<sub>2</sub><sup>IV</sup>:** Povežemo točki **R** in **2<sup>IV</sup>** ter točki **P** in **II** s poltrakoma, ki se sekata v točki **T<sub>2</sub><sup>IV</sup>** elipse.

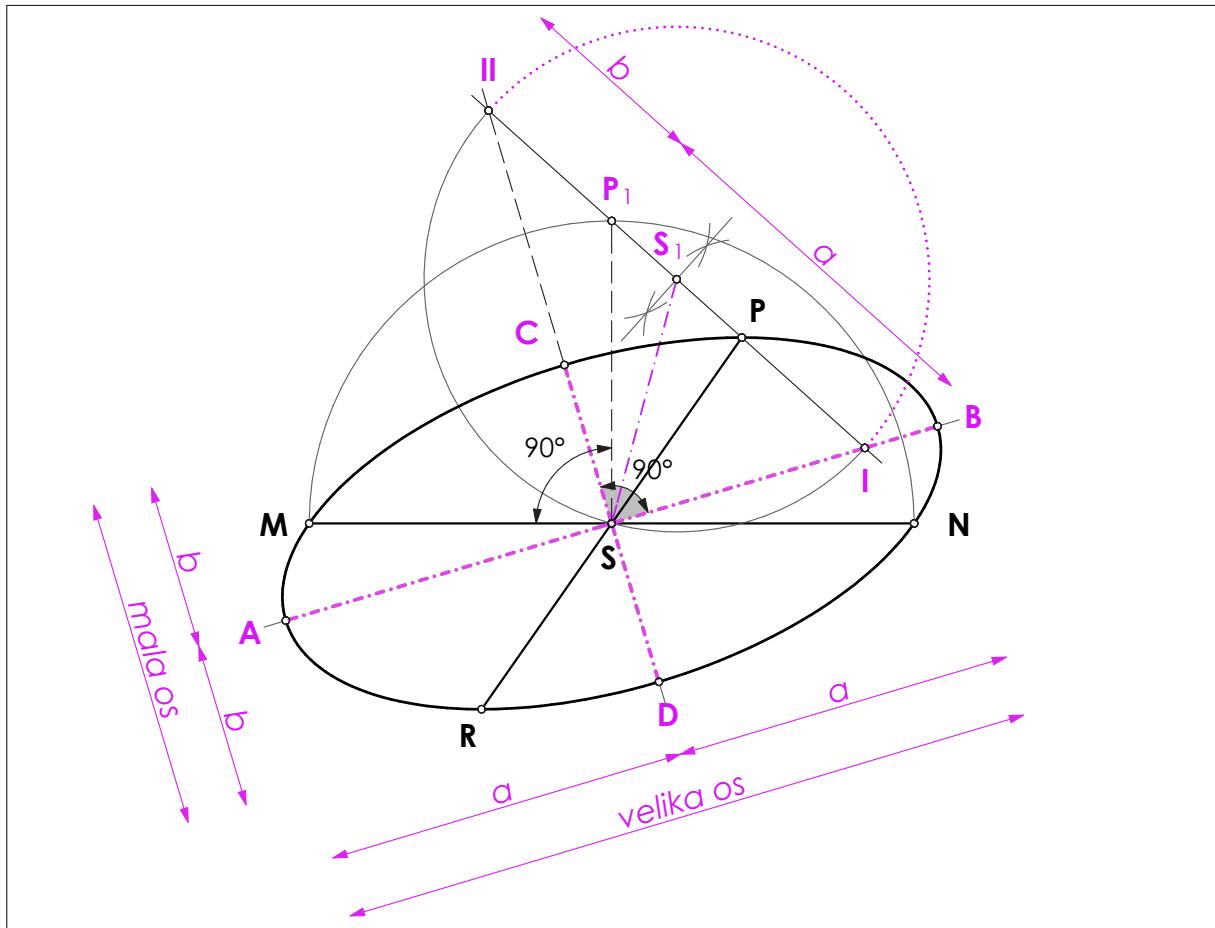
Ta postopek ponovimo, da dobimo še druge točke elipse.

*Risanje krivulje elipse:* Točke elipse spojimo s krivuljnikom v gladko in napeto krivuljo. Pri risanju krivulje moramo paziti, da se elipsa dotika tudi očrtanega paralelograma v točkah **M**, **N**, **P** in **R**.

## 6.8 Določanje osi elipse, če sta znana konjugirana premera (Rytzova metoda)

V elipsi imenujemo vsako dvojico premerov, pri katerih sta tangenti v krajiščih enega premera vzporedni drugemu premeru, *konjugirana* ali *prirejena* premera. Konjugirana premera se v središču **S** elipse razpolavlja.

Če sta dana konjugirana premera elipse, določimo veliko in malo os elipse s pomočjo Rytzove konstrukcije.



Dana sta konjugirana premera **MN** in **PR**.

Na enega izmed konjugiranih premerov (tukaj na premer **MN**) narišemo v središču **S** pravokotnico in nanjo nanesemo iz središča **S** polovico dolžine tega premera, da dobimo točko **P<sub>1</sub>**. Skozi točko **P<sub>1</sub>** in najbliže krajišče drugega konjugiranega premera (tukaj skozi krajišče **P**) narišemo premico. Daljico **PP<sub>1</sub>** razpolovimo, da dobimo središče **S<sub>1</sub>**. Nato narišemo skozi središče **S** elipse Talesovo krožnico s središčem v razpolovišču **S<sub>1</sub>**, ki seka premico (**P, P<sub>1</sub>**) v točkah **I** in **II**. Zatem narišemo premico (**I, S**) in premico (**II, S**). Premici sta med seboj pravokotni. Na premici (**I, S**) leži velika os, na premici (**II, S**) pa mala os elipse.

Razdalja  $|IP_1| = |IP| \dots \dots \alpha = \text{polovica velike osi}$

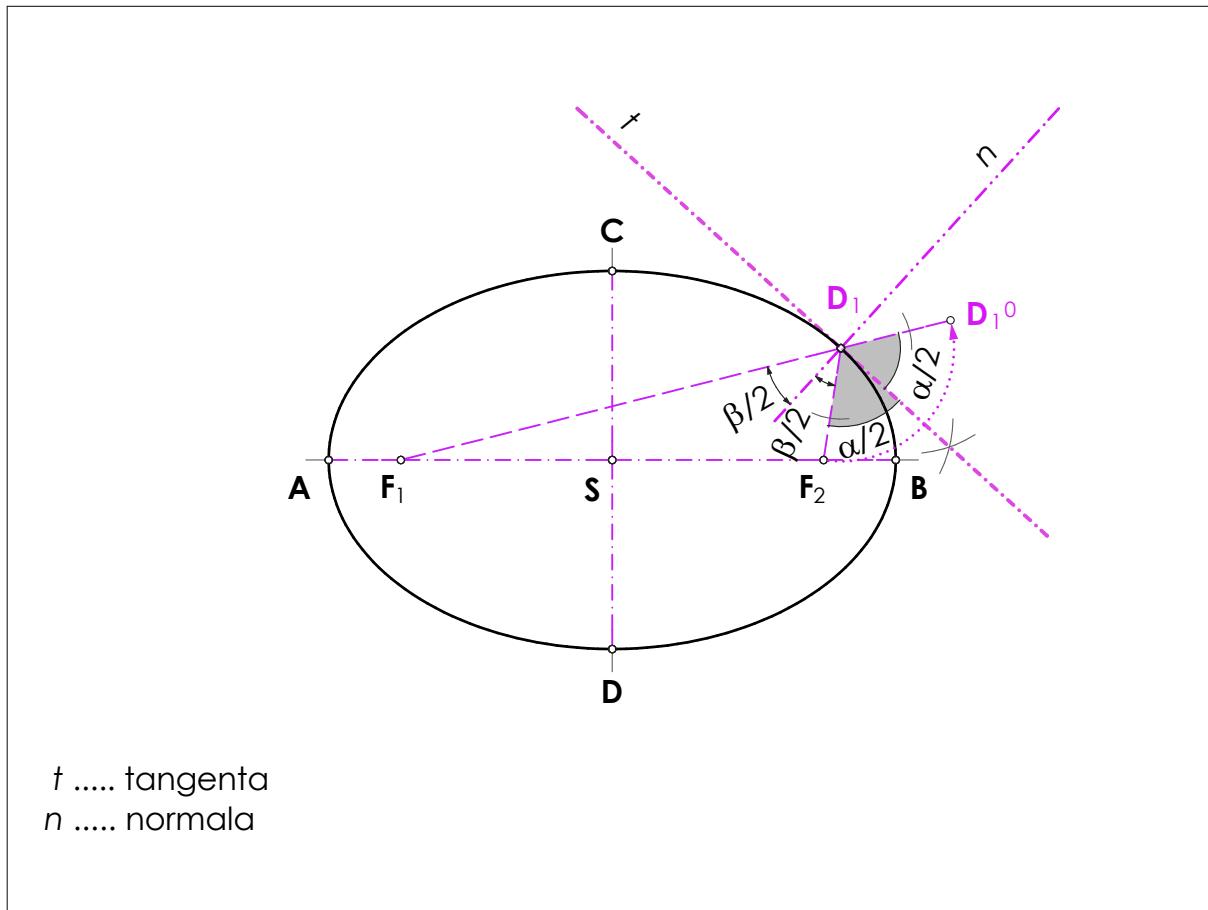
Razdalja  $|IP_1| = |IP| \dots \dots \beta = \text{polovica male osi}$

Ko smo določili obe osi, narišemo elipso po eni izmed znanih metod.

### 6.9 Tangenta in normala na elipso v dani točki elipse

Tangenta je simetrala kota (tukaj kota  $\alpha$ ) med eno prevodnico in podaljškom druge prevodnice.

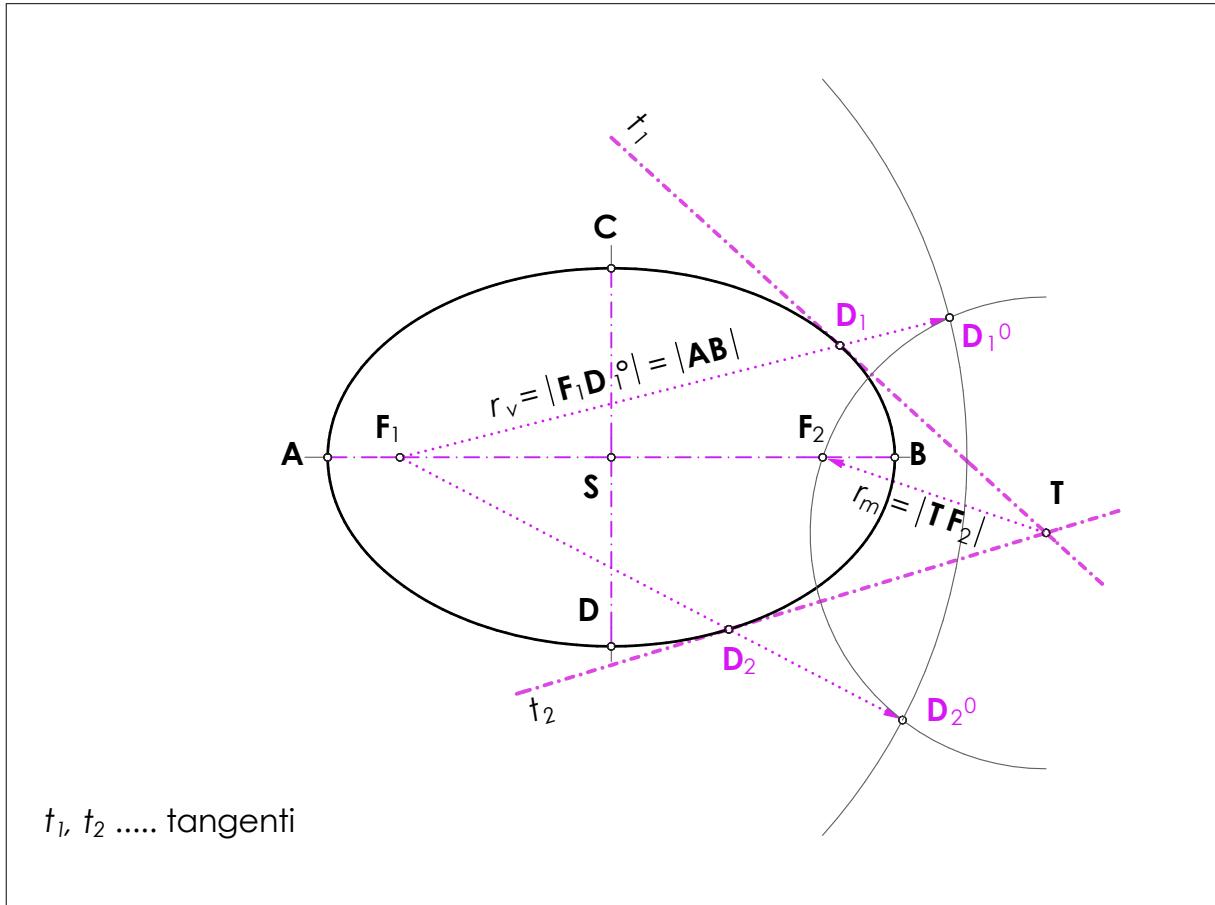
Normala je simetrala kota (tukaj kota  $\beta$ ) med obema prevodnicama in je pravokotna na tangento.



Dana je točka  $D_1$  na dani elipsi z znanima polosema  $a$  in  $b$ .

Konstrukcija tangente: Dano dotikalishče  $D_1$  na elipsi spojimo z goriščema  $F_1$  in  $F_2$ . Nato podaljšamo eno izmed prevodnic (tukaj daljšo prevodnico  $F_1D_1$ ) preko dotikalishča  $D_1$  za dolžino druge prevodnice (tukaj krajše prevodnice  $F_2D_1$ ), da dobimo točko  $D_1^0$ . Simetrala kota  $F_2D_1D_1^0$  z vrhom v točki  $D_1$  je tangenta  $t$  na elipso v dani točki  $D_1$ .

### 6.10 Tangenti na elipso iz dane zunanje točke



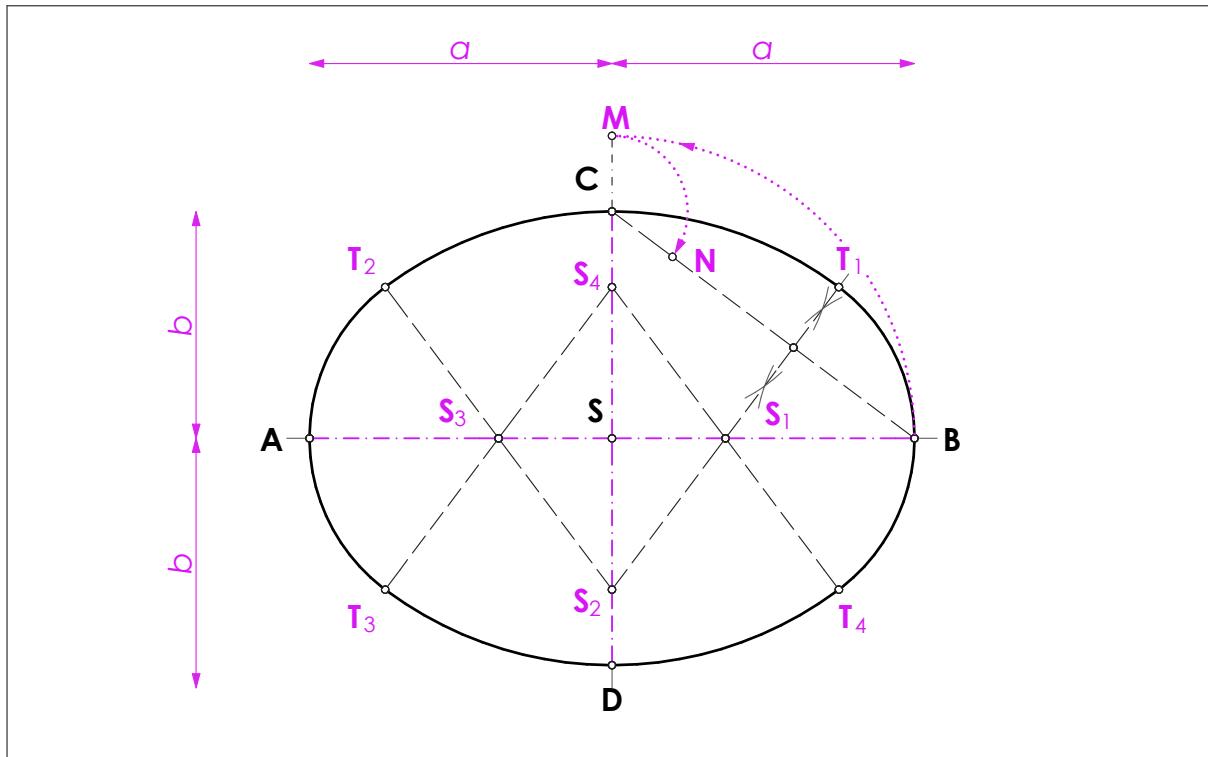
Dani sta elipsa z zanimimi pološema  $a$  in  $b$  ter točka  $T$  zunaj elipse.

**Konstrukcija dotikalihč in tangent:** Skozi gorišče (tukaj skozi gorišče  $F_2$ ), ki je dani zunanji točki  $T$  bliže, narišemo krožni lok s polmerom  $r_m$  in s središčem v zunanji točki  $T$ . Nato narišemo nasprotni krožni lok s polmerom  $r_v$ , ki je enak dolžini velike osi  $AB$  in s središčem v bolj oddaljenem gorišču (tukaj v gorišču  $F_1$ ). Oba krožna loka se sekata v točkah  $D_1^0$  in  $D_2^0$ . Zveznici presečišč  $D_1^0$  in  $D_2^0$  z bolj oddaljenim goriščem (tukaj z goriščem  $F_1$ ) sekata elipso v točkah  $D_1$  in  $D_2$ , ki sta dotikalihči obeh tangent z elipso. Premici, ki ju narišemo skozi zunanjo točko  $T$  ter skozi dotikalihči  $D_1$  in  $D_2$ , sta iskani tangentti  $t_1$  in  $t_2$ .

## 7 OVALNE KRIVULJE

Ovalna krivulja je krivulja, ki je sestavljena iz samih krožnih lokov. Sem spada oval ali locen, ki je zelo podoben elipsi. Kadar ni pomembna konstrukcija elipse in želimo prikazati samo obliko, uporabimo včasih oval namesto elipse.

### 7.1 Oval



Dani sta velika polos  $a$  in mala polos  $b$  ovala.

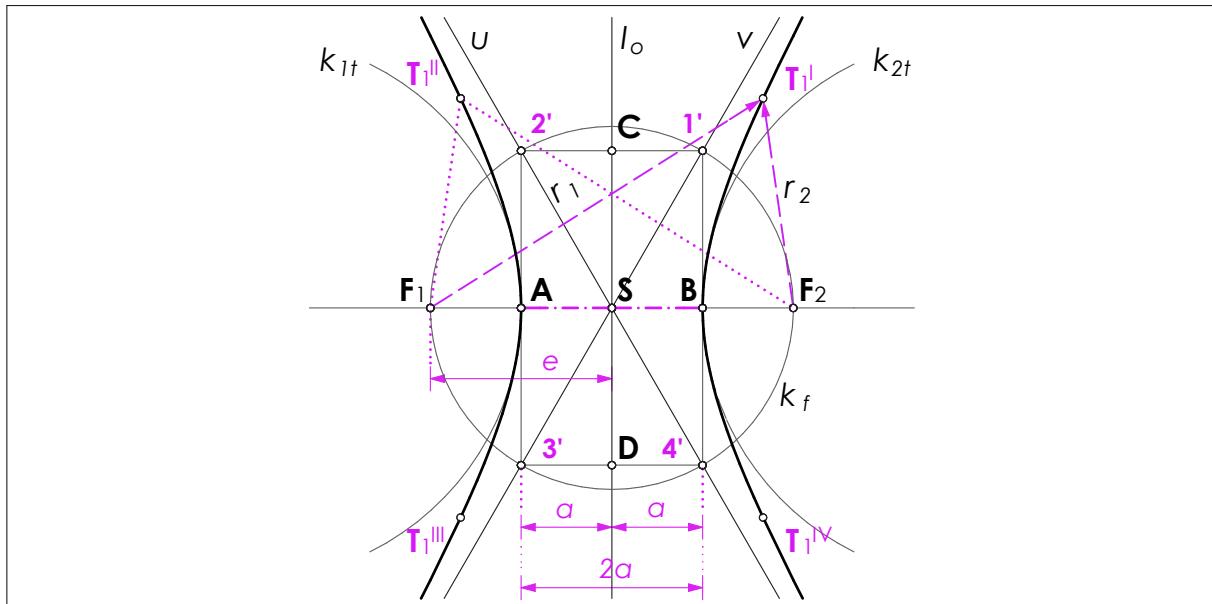
*Risanje osi ovala:* Narišemo veliko os z dano dolžino  $2a$ , kjer sta točki **A** in **B** glavni temeni ovala. Nato narišemo malo os z dano dolžino  $2b$ , kjer sta točki **C** in **D** stranski temeni ovala. Velika in mala os sta med seboj pravokotni in se med seboj razpolavlja v središču **S**.

*Določitev središč **S**<sub>1</sub> in **S**<sub>2</sub> krožnih lokov ovala:* Na podaljšku male osi konstruiramo točko **M**, tako da je dolžina daljice **SM** enaka dolžini velike polosi. Iz tega sledi, da je dolžina daljice **CM** enaka razlike dolzin med veliko in mala polosjo ovala. Zatem narišemo tečivo **BC** in na njej odmerimo dolžino daljice **CM**, da dobimo točko **N**. Sedaj narišemo simetralo daljice **BN**, ki seka veliko os v točki **S**<sub>1</sub> in mala os v točki **S**<sub>2</sub>. Središči **S**<sub>1</sub> in **S**<sub>2</sub> sta središči krožnih lokov, ki sestavljata četrtino ovala. Središči **S**<sub>3</sub> in **S**<sub>4</sub> dobimo z zrcaljenjem središč **S**<sub>1</sub> in **S**<sub>2</sub> čez središče **S** ovala.

*Risanje ovala:* Narišemo krožni lok iz središča **S**<sub>1</sub> skozi teme **B** in krožni lok iz središča **S**<sub>2</sub> skozi teme **C**. Oba krožna loka se stikata na simetrali (**S**<sub>1</sub>, **T**<sub>1</sub>). Preostale tri četrtine ovala narišemo na enak način kot prvo četrtino.

## 8 HIPERBOLA

### 8.1 Oznake pri hiperboli

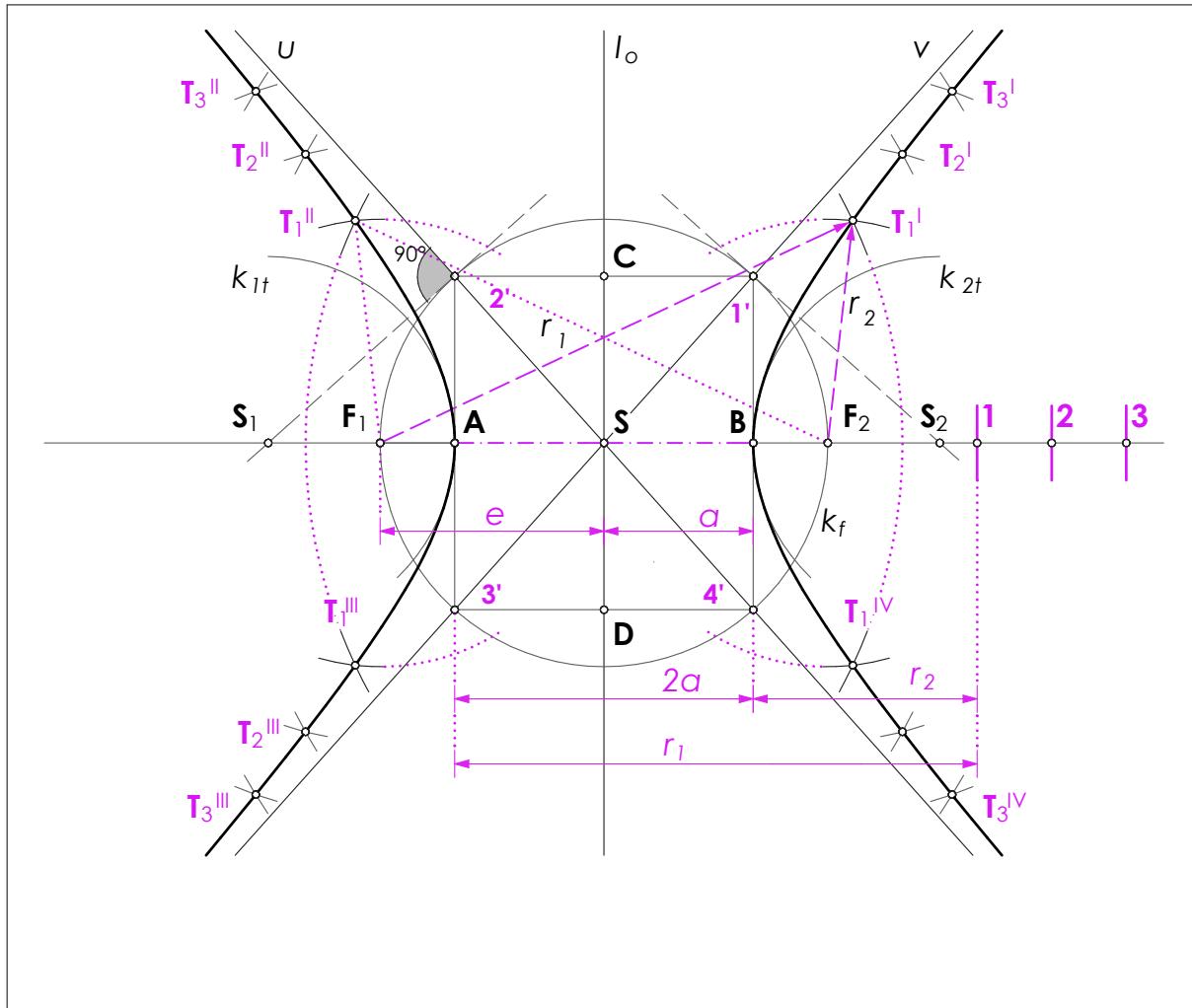


**Definicija** ..... Hiperbola je množica točk v ravni, za katere je razlika njihovih razdalj od dveh stalnih točk (gorišč) konstantna in enaka realni osi hiperbole. Hiperbole sestavljata dve veji.

$r_1 - r_2 = 2a$	desna veja: $ F_1T_1^I  -  F_2T_1^I  =  \mathbf{AB} $
$r_2 - r_1 = 2a$	leva veja: $ F_2T_1^{II}  -  F_1T_1^{II}  =  \mathbf{AB} $
$S$	središče hiperbole
$F_1, F_2$	gorišči (žarišči ali fokusa)
$A, B$	glavni temeni
$C, D$	stranski temeni
$2a =  \mathbf{AB} $	glavna ali realna os
$I_o$	stranska ali imaginarna os
$a =  SA  =  SB $	realni polosi
$b =  SC  =  SD $	imaginarni polosi
$e =  SF_1  =  SF_2 $	linearna ekscentričnost – razdalja gorišča od središča
$r_1 =  F_1T_1^I $	prevodnica ali radijvektor – razdalja točke $T_1^I$ na hiperboli od gorišča $F_1$
$r_2 =  F_2T_1^I $	prevodnica ali radijvektor – razdalja točke $T_1^I$ na hiperboli od gorišča $F_2$
$u, v$	asimptoti
$k_f$	goriščna krožnica
$k_{1t}, k_{2t}$	pritisnjena krožna loka v temenih hiperbole
pravokotnik $1'2'3'4'$	značilni pravokotnik hiperbole

## 8.2 Načrtovanje hiperbole po definiciji

Pri konstruiranju hiperbole upoštevamo definicijo hiperbole, da je razlika razdalj (prevodnic)  $r_1$  in  $r_2$  za vsako točko hiperbole od dveh stalnih točk (gorišč) konstantna in enaka realni osi hiperbole ( $r_1 - r_2 = 2a$ ).



Dani sta realna polos  $a$  in linearna ekscentričnost  $e$  hiperbole.

*Risanje realne osi in določanje gorišč hiperbole:* Narišemo premico in označimo središče  $\mathbf{S}$  hiperbole. Na premici od središča  $\mathbf{S}$  odmerimo na obe strani dolžino realne polosi  $a$ , da dobimo glavni temeni  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{B}$  hiperbole. Na isti premici od središča  $\mathbf{S}$  odmerimo na obe strani dolžino linearne ekscentričnosti  $e$ , da dobimo gorišči  $\mathbf{F}_1$  in  $\mathbf{F}_2$ . Imaginarna os  $I_o$  poteka pravokotno na realno os  $\mathbf{AB}$  skozi središče  $\mathbf{S}$  in jo razpolavlja.

*Določanje točk hiperbole:* Na premici  $(F_1, F_2)$  izberemo zunaj gorišč  $F_1$  in  $F_2$  nekaj poljubnih točk **1**, **2**, **3** ...). V šestilo vzamemo razdaljo  $r_1$  (od temena **A** do točke **1**) in narišemo iz gorišč  $F_1$  in  $F_2$  krožna loka s tem polmerom. Nato vzamemo v šestilo razdaljo  $r_2$  (od temena **B** do točke **1**) in narišemo iz gorišč  $F_1$  in  $F_2$  še krožna loka s tem polmerom. Presečišča lokov  $r_1$  in  $r_2$  nam dajo po dve točki na obeh vejah hiperbole (na sliki so označene točke  $T_1^I$  in  $T_1^{IV}$  ter  $T_1^{II}$  in  $T_1^{III}$ ). Ta postopek ponovimo s prevodnicami, ki imajo dolžine od temena **A** do točk **2** in **3** ter od temena **B** do točk **2** in **3**. Presečišča ustreznih krožnih lokov določijo nove točke hiperbole. Če smo izbrali več točk na podaljšku realne osi, postopek še ponovimo.

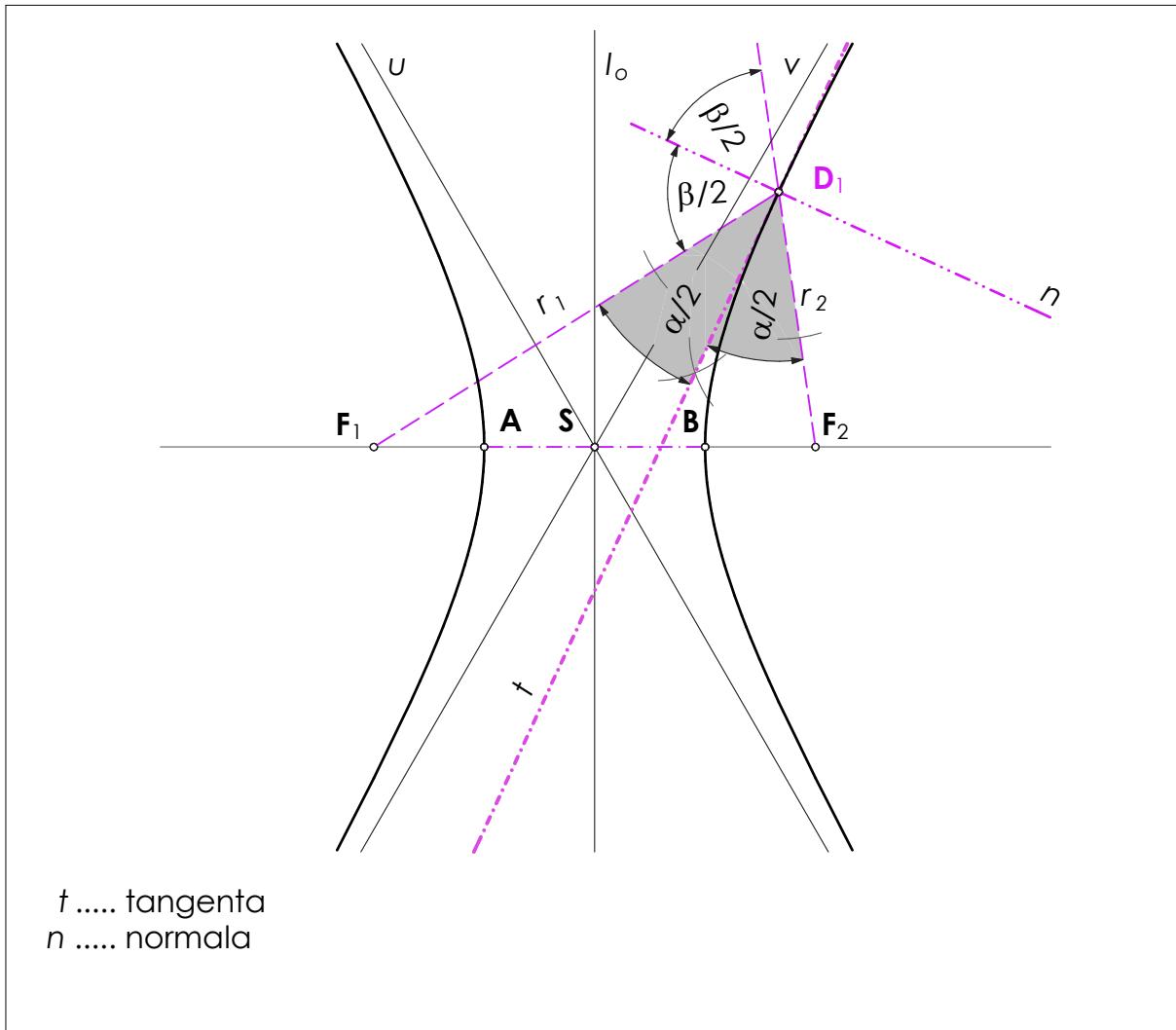
*Asimptote:* Iz središča **S** narišemo goriščno krožnico  $k_f$  skozi gorišči  $F_1$  in  $F_2$ . Nato narišemo v temenih **A** in **B** pravokotno na realno os še temenski tangentni hiperbole. Ti tangentni sekata goriščno krožnico v točkah **1'**, **2'**, **3'** in **4'**. Če zvežemo te štiri točke, dobimo značilni *temenski pravokotnik* hiperbole. Diagonalni premici, ki ju narišemo skozi oglišča temenskega pravokotnika, sta *asimptoti* hiperbole (tukaj sta asimptoti **u** in **v**).

*Pritisnjena krožna loka  $k_{1t}$  in  $k_{2t}$  v temenih hiperbole:* Krivini obeh krivulj hiperbole v bližini temen **A** in **B** določimo s pritisnjenima krožnima lokoma  $k_{1t}$  in  $k_{2t}$ . Središče **S<sub>1</sub>** krožnega loka  $k_{1t}$  določimo tako, da v eni izmed točki **2'** ali **3'** (tukaj v točki **2'**) narišemo pravokotnico na ustrezno asimptoto (tukaj na asimptoto **u**), da seka premico  $(F_1, F_2)$  v točki **S<sub>1</sub>**. Središče **S<sub>2</sub>** pritisnjenega krožnega loka  $k_{2t}$  dobimo z zrcaljenjem središča **S<sub>1</sub>** čez središče **S** hiperbole. V temenih **A** in **B** se krivulji hiperbole dotikata pritisnjениh temenskih krožnih lokov.

*Risanje krivulj hiperbole:* Tako dobljene točke posameznih vej hiperbole s krivuljnikom povežemo med seboj v napeti in gladki veji hiperbole.

### 8.3 Tangenta in normala na hiperbole v dani točki hiperbole

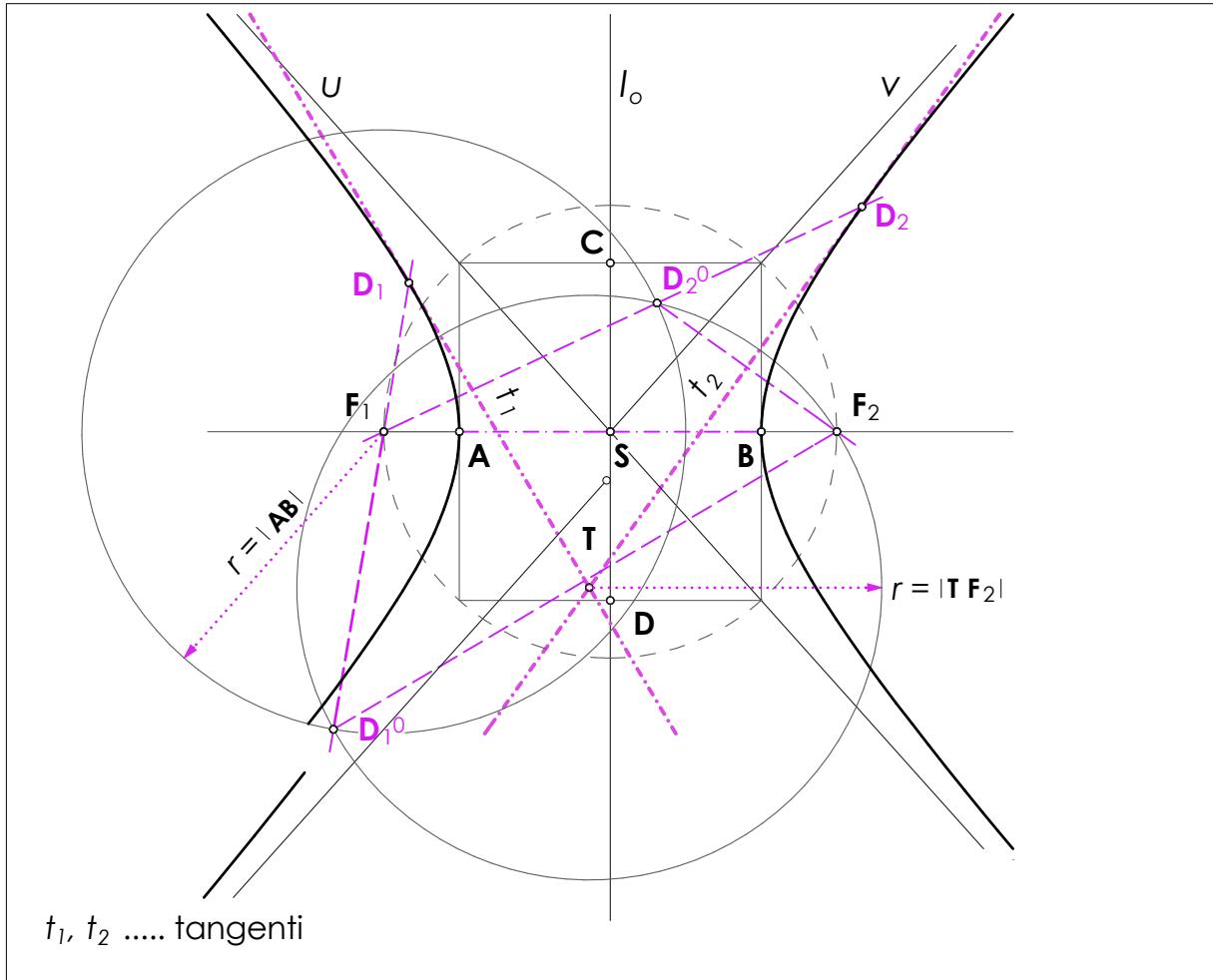
Tangenta v dani točki hiperbole je simetrala notranjega kota (tukaj kota  $\alpha$ ) med obema prevodnicama, normala v dani točki hiperbole pa je simetrala njego-vega suplementarnega kota (tukaj kota  $\beta$ ) in je pravokotna na tangento.



Dana je točka  $D_1$  na dani veji hiperbole z znano realno polosjo  $a$  in znano linearno ekscentričnostjo  $e$ .

Tangenta v dani točki  $D_1$  hiperbole je simetrala notranjega kota  $\alpha$  med obema prevodnicama  $r_1$  in  $r_2$ , ki povezujeta gorišči  $F_1$  in  $F_2$  z dano točko  $D_1$  (tukaj je simetrala notranjega kota  $F_1D_1F_2$  z vrhom v točki  $D_1$ ).

#### 8.4 Tangenti na hiperbolo iz dane zunanje točke



Dani sta hiperbola z znano realno polosjo  $a$  in znano linearne ekscentričnostjo  $e$  ter točka  $T$  zunaj hiperbole.

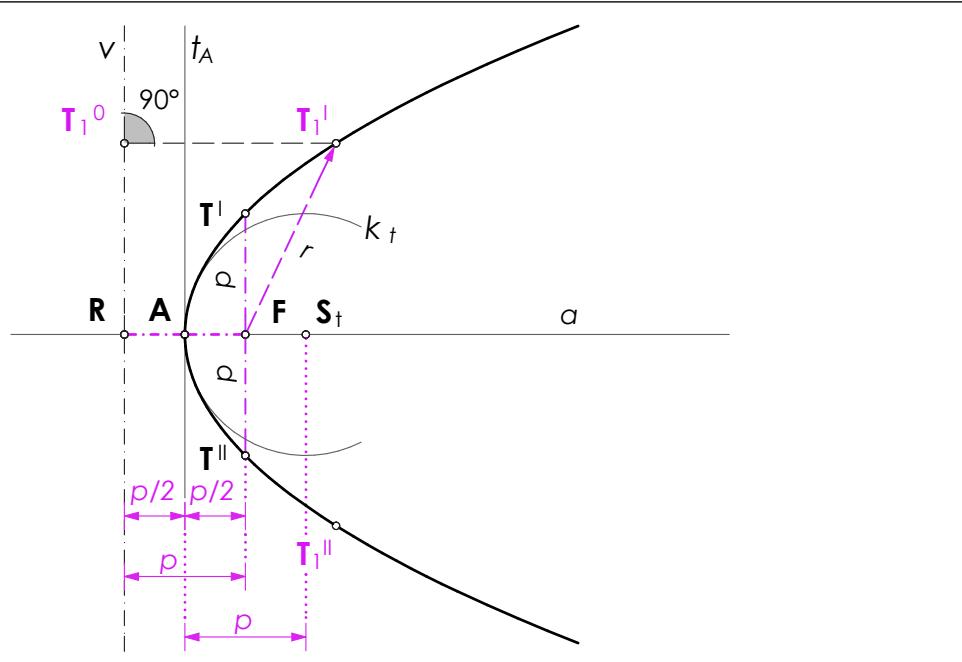
**Konstrukcija dotikalishč tangent:** Skozi enega od gorišč (tukaj skozi gorišče  $F_2$ ) narišemo krožni lok s središčem v dani točki  $T$ . Nato narišemo krožni lok s središčem v drugem gorišču (tukaj v gorišču  $F_1$ ) in s polmerom, ki je enak dolžini realne osi  $\mathbf{AB}$ . Oba krožna loka se sekata v točkah  $D_1^0$  in  $D_2^0$ . Skozi točko  $D_1^0$  in gorišče  $F_1$  narišemo premico, ki seka vejo hiperbole, bližje gorišču  $F_1$ , v točki  $D_1$ . Ta je dotikalishče tangente  $t_1$ . Skozi gorišče  $F_1$  in točko  $D_2^0$  pa narišemo premico, ki seka vejo hiperbole, bližje gorišču  $F_2$ , v točki  $D_2$ . Ta je dotikalishče tangente  $t_2$ .

**Tangenta  $t_1$ :** Premica, narisana skozi zunanjo točko  $T$  in dotikalishče  $D_1$ , je tangenta  $t_1$  na prvo vejo hiperbole in hkrati tudi simetrala daljice  $D_1^0F_2$ .

**Tangenta  $t_2$ :** Premica, narisana skozi zunanjo točko  $T$  in dotikalishče  $D_2$ , je tangenta  $t_2$  na drugo vejo hiperbole in hkrati tudi simetrala daljice  $D_2^0F_2$ .

## 9 PARABOLA

### 9.1 Oznake pri paraboli



**Definicija** ..... Parabola je množica točk v ravnini, enako oddaljenih od gorišča in od premice vodnice. Za točke parbole velja, da je pravokotna razdalja točke na parbole od premice vodnice enaka razdalji te točke od gorišča ( $T_1^I T_1^0 = T_1^I F$ ).

**F** ..... gorišče (žarišče ali fokus)

**A** ..... teme parbole

**a** ..... os parbole – os simetrije, ki poteka skozi teme in gorišče parbole

**v** ..... Premica vodnica (direktrisa) je pravokotna na os parbole.

**R** ..... presečišče premice vodnice in osi parbole

**p** = |RF| ..... Goriščni parameter (karakteristična konstanta) – parabola je popolnoma določena s parametrom.

**p/2** = |RA| = |AF| .... Teme parbole **A** je na osi parbole v sredini med premico vodnico (točko **R**) in goriščem **F**.

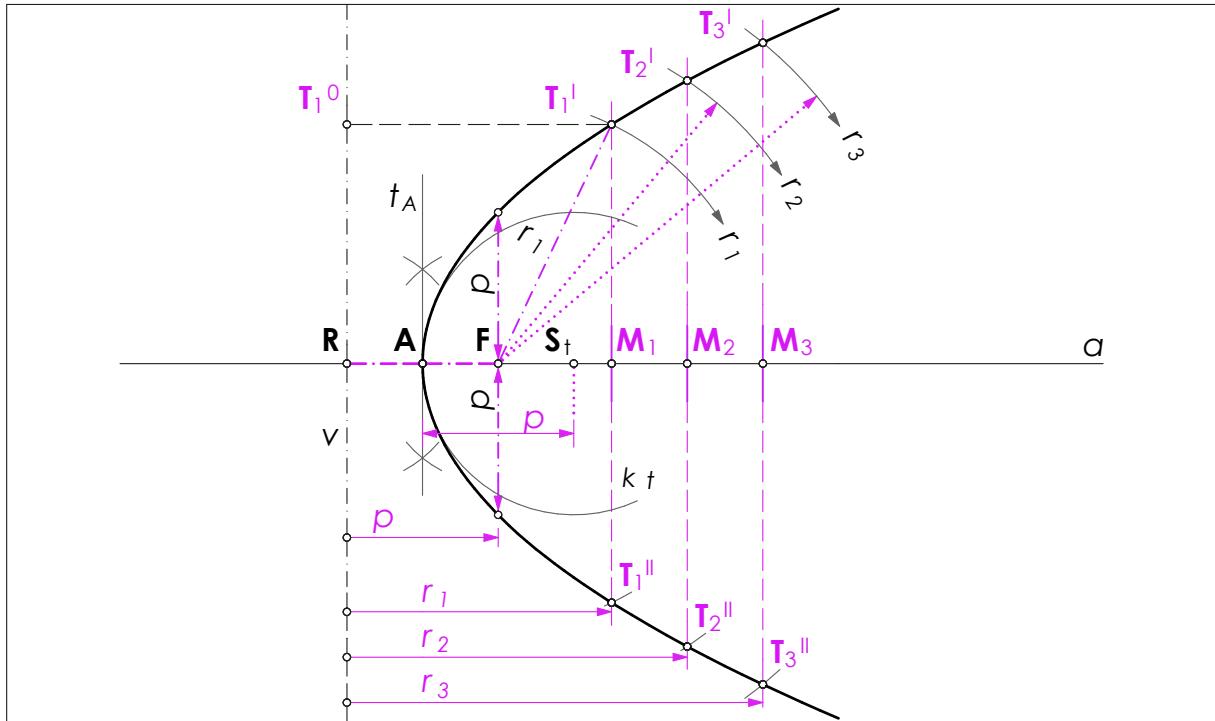
**r** ..... prevodnica ali radijvektor – oddaljenost točke na parboli od gorišča

**t<sub>A</sub>** ..... tangenta parbole v temenu **A**

**k<sub>t</sub>** ..... pritisnjeni krožni lok v temenu parbole

**2p** = |T<sup>I</sup> T<sup>II</sup>| ..... Tetiva parbole, položena skozi gorišče pravokotno na os **a**, je enaka dolžini **2p**.

## 9.2 Načrtovanje parabole po definiciji



Pri konstruiranju parbole upoštevamo definicijo parbole, da je pravokotna razdalja vsake točke parbole od premice vodnice enaka razdalji te točke od gorišča.

Dan je parameter  $p$  parbole s krajiščema  $R$  in  $F$ .

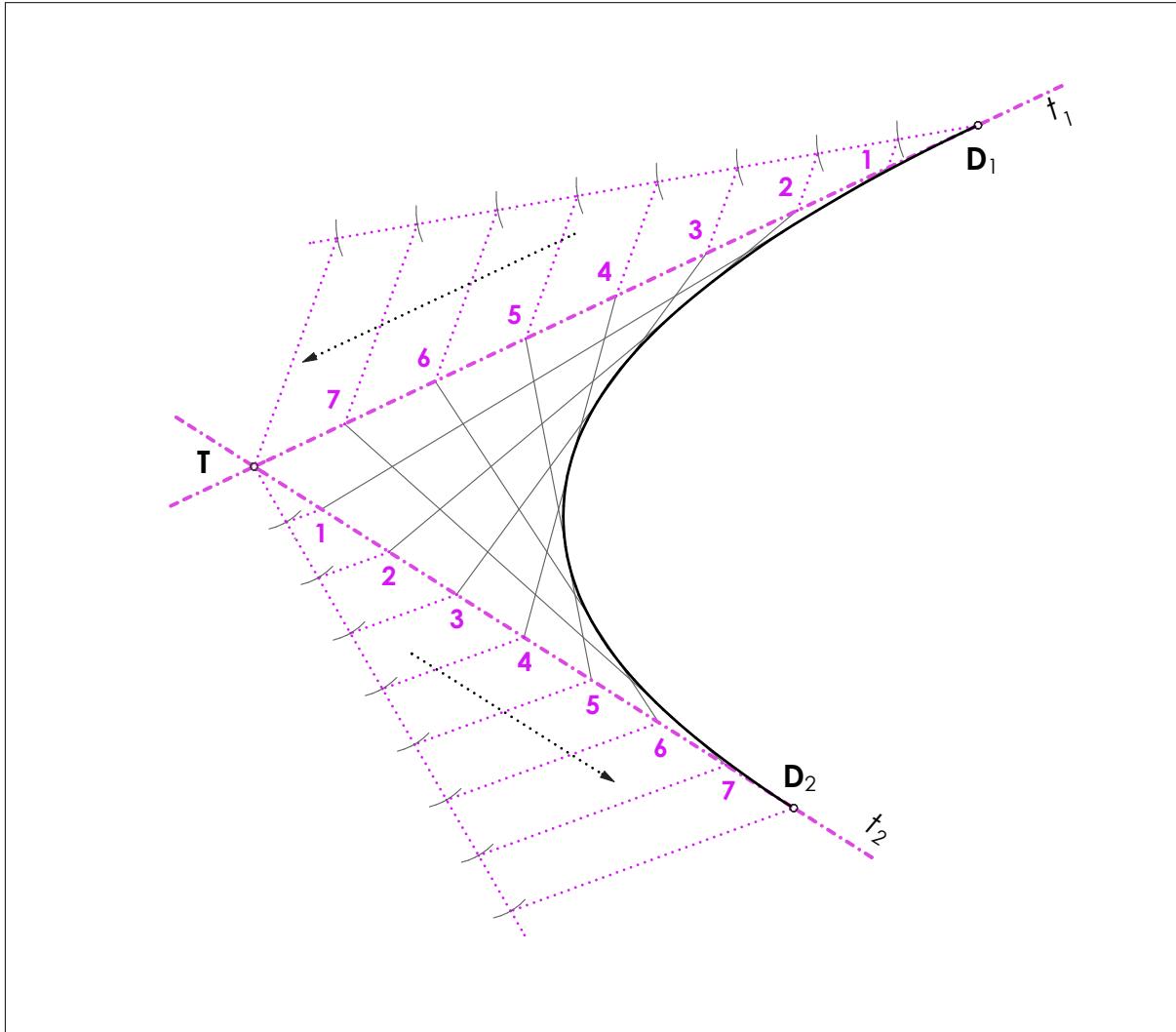
*Konstrukcija elementov danega parametra  $p$ :* Narišemo os parbole  $a$ , ki je nosilka parametra  $p$ . Na osi  $a$  odmerimo dolžino parametra  $p$ , da dobimo točki  $R$  in  $F$ . Točka  $F$  je gorišče parbole. V točki  $R$  narišemo premico vodnico  $v$ , ki je pravokotna na parameter  $RF$ . Nato narišemo simetralo parametra  $RF$ , da dobimo teme  $A$  parbole. Simetrala parametra  $RF$  je tudi temenska tangenta  $t_A$  parbole v temenu  $A$ .

*Konstrukcija točk parbole:* Na osi parbole izberemo nekaj poljubnih točk ( $M_1, M_2, M_3 \dots$ ). V točki  $M_1$  narišemo pravokotnico na os parbole. Nato vzamemo v šestilo razdaljo  $r_1$  (od točke  $R$  na premici vodnici do točke  $M_1$  na osi parbole) in narišemo iz gorišča  $F$  krožni lok s tem polmerom, ki seka narisano pravokotnico v točkah  $T_1^I$  in  $T_1^{II}$ , ki sta že točki parbole. Ta postopek ponovimo prevodnicami, ki imajo dolžine od točke  $R$  do točk  $M_2$  in  $M_3$ . Presečišča ustreznih prevodnic in pravokotnic določijo nove točke parbole. Če smo izbrali več točk na osi parbole, postopek še ponovimo.

*Pritisnjeni krožni lok  $k_t$  v temenu parbole:* Del ukrivljenosti parbole v bližini temena  $A$  določimo s pritisnjениm krožnim lokom  $k_t$ , ki ima središče  $S_t$  na osi parbole. Središče  $S_t$  je oddaljeno od temena  $A$  za dolžino parametra  $RF$ .

*Risanje krivulje parbole:* Tako dobljene točke parbole spojimo s krivuljnikom v napeto in gladko krivuljo parbole.

### 9.3 Parabola je dana z dvema tangentama in njunima dotikališčema na paraboli



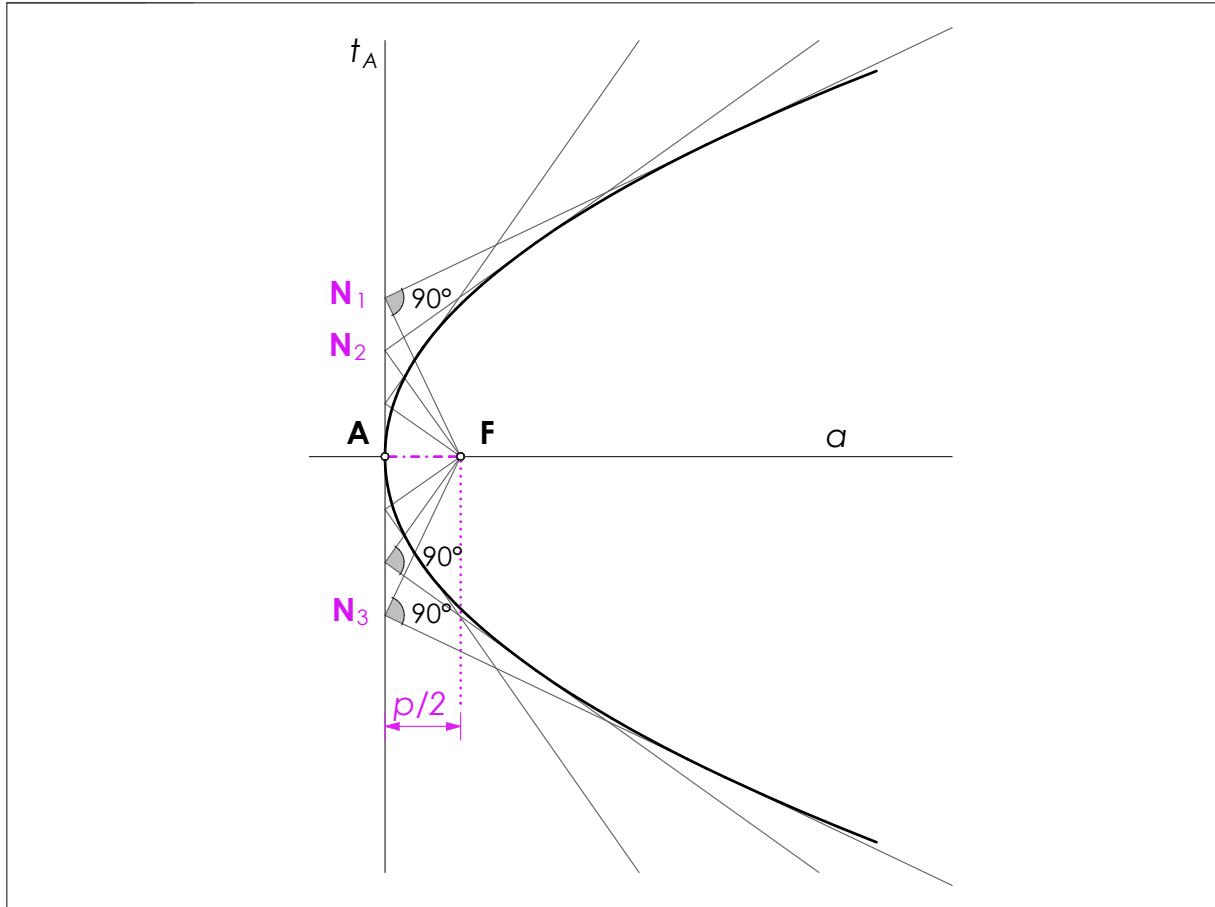
Dani sta dotikališči parbole  $\mathbf{D}_1$  in  $\mathbf{D}_2$  na danih tangentah  $t_1$  in  $t_2$ .

Tangenti  $t_1$  in  $t_2$  se sekata v točki  $\mathbf{T}$ . Daljici  $\mathbf{TD}_1$  in  $\mathbf{TD}_2$  razdelimo na enako število delov (tukaj sta daljici razdeljeni na 8 ustrezno enakih delov). Delitvene točke označimo z zaporednimi številkami **1**, **2**, **3** ... **n** od dotikališča  $\mathbf{D}_1$  do presečišča  $\mathbf{T}$  in od presečišča  $\mathbf{T}$  do dotikališča  $\mathbf{D}_2$ . Če delitvene točke z enakimi številčnimi oznakami zvežemo, dobimo nove tangente parbole, ki so med obema danimi tangentama ter dotikališčema  $\mathbf{D}_1$  in  $\mathbf{D}_2$ . Sedaj lahko med dotikališčema  $\mathbf{D}_1$  in  $\mathbf{D}_2$  ter ob novih tangentah precej natančno včrtamo s krivulnjikom gladko in napeto dotikalno krivuljo parbole.

#### 9.4 Parabola je dana s temensko tangento in z goriščem

Tangenta parabole preseka temensko tangento  $t_A$  v presečišču, ki ga imenujemo nožišče  $\mathbf{N}$ . Zveznica gorišča  $\mathbf{F}$  z nožiščem  $\mathbf{N}$  oklepa v nožišču  $\mathbf{N}$  pravi kot s pripadajočo tangento.

To pravilo uporabimo za konstrukcijo parbole.

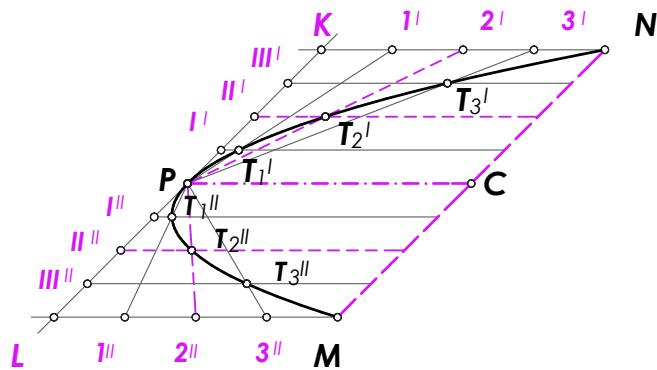


Dana je razdalja  $\mathbf{AF}$  med temenom  $\mathbf{A}$  in goriščem  $\mathbf{F}$  parbole ( $p/2$ ).

**Konstrukcija tangent parbole:** Skozi teme  $\mathbf{A}$  in gorišče  $\mathbf{F}$  narišemo os parbole  $\mathbf{a}$ . V temenu narišemo temensko tangento  $t_A$ , ki je pravokotna na os parbole. Na temenski tangenti izberemo poljubna nožišča tangent  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3 \dots \mathbf{N}_n$ . Nato zvežemo nožišče  $\mathbf{N}_1$  z goriščem  $\mathbf{F}$  in narišemo v nožišču  $\mathbf{N}_1$  pravokotnico na zveznico točk  $\mathbf{F}$  in  $\mathbf{N}_1$ . Pravokotnica je že iskana tangenta parbole. Postopek ponovimo in zvežemo še druga izbrana nožišča z goriščem ter narišemo pravokotnice na ustrezne zveznice točk. Narisane pravokotnice so iskane tangente parbole.

**Risanje parbole:** Sedaj lahko ob narisanih tangentah včrtamo s krivuljnikom gladko in napeto dotikalno krivuljo parbole.

## 9.5 Parabola je dana s konjugiranim premerom in tetivo



Dana sta konjugirani premer **PC** in tetiva **MN**.

**Konstrukcija točk parbole:** Narišemo paraboli očrtani paralelogram **KLMN**. Danemu konjugiranemu premeru **PC** narišemo vzporednici skozi krajišči tetinev **M** in **N**, dani tetivi **MN** pa narišemo vzporedno tangentu **KL** skozi krajišče **P** konjugiranega premera. Daljice **PK** in **PL** ter **KN** in **LM** razdelimo na enako število ustreznih enakih delov (tukaj sta dvojici daljic razdeljeni na štiri enake dele). Na vzporednicah **KN** in **LM** označimo delišča v smeri parbole, na vzporedni tangenti **KL** pa označimo delišča od točke **P** na vsako stran.

Skozi delišča na tangentni **KL** narišemo vzporednice konjugiranemu premeru **PC**, iz krajišča **P** konjugiranega premera pa narišemo poltrake skozi delišča na vzporednicah **KN** in **LM**.

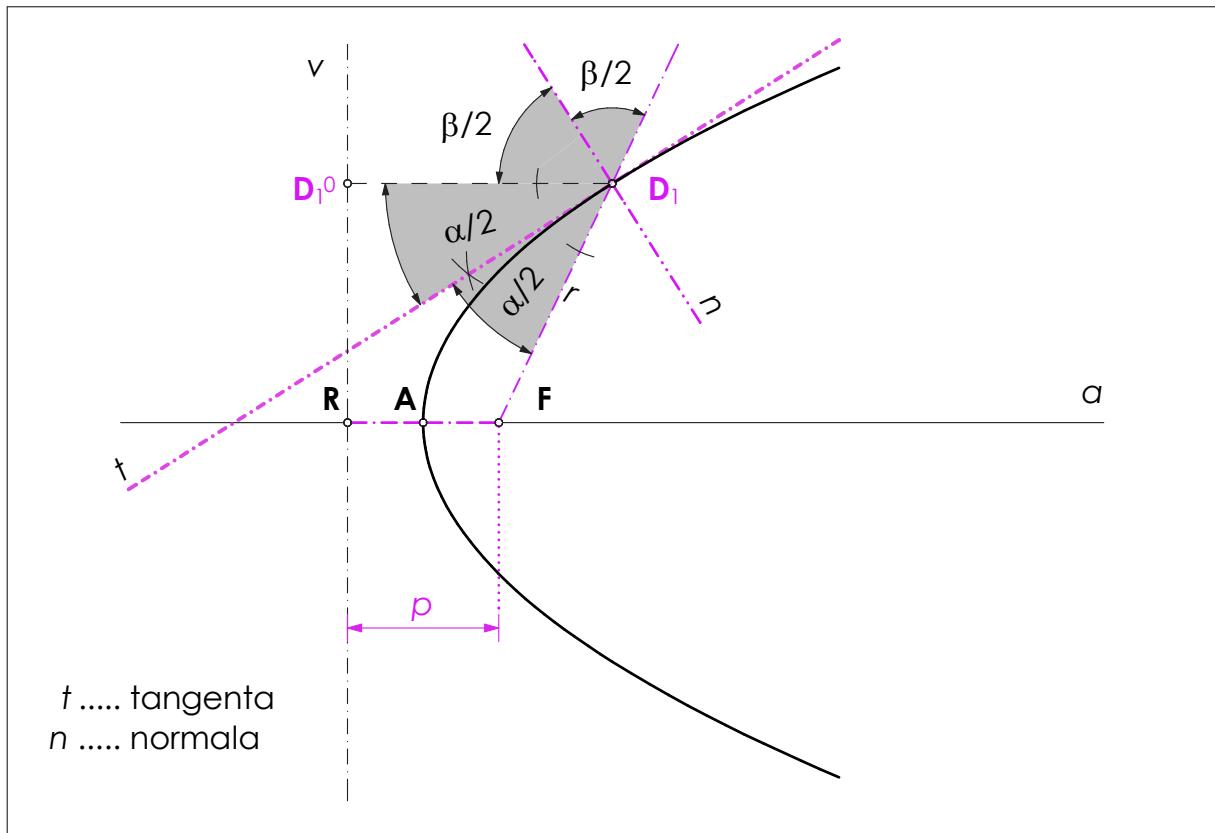
**T<sub>2</sub><sup>I</sup>:** Poltrak skozi točki **P** in **2<sup>I</sup>** seka vzporednico skozi točko **III<sup>I</sup>** v točki **T<sub>2</sub><sup>I</sup>**, ki je že točka parbole.

**T<sub>2</sub><sup>II</sup>:** Poltrak skozi točki **P** in **2<sup>II</sup>** seka vzporednico skozi točko **III<sup>II</sup>** v točki **T<sub>2</sub><sup>II</sup>**, ki je zopet točka parbole.

Ta postopek ponovimo, da dobimo še druge točke parbole.

**Risanje parbole:** Točke parbole spojimo med seboj s krivuljnikom v napeto in gladko krivuljo.

### 9.6 Tangenta in normala na parabolo v dani točki parabole

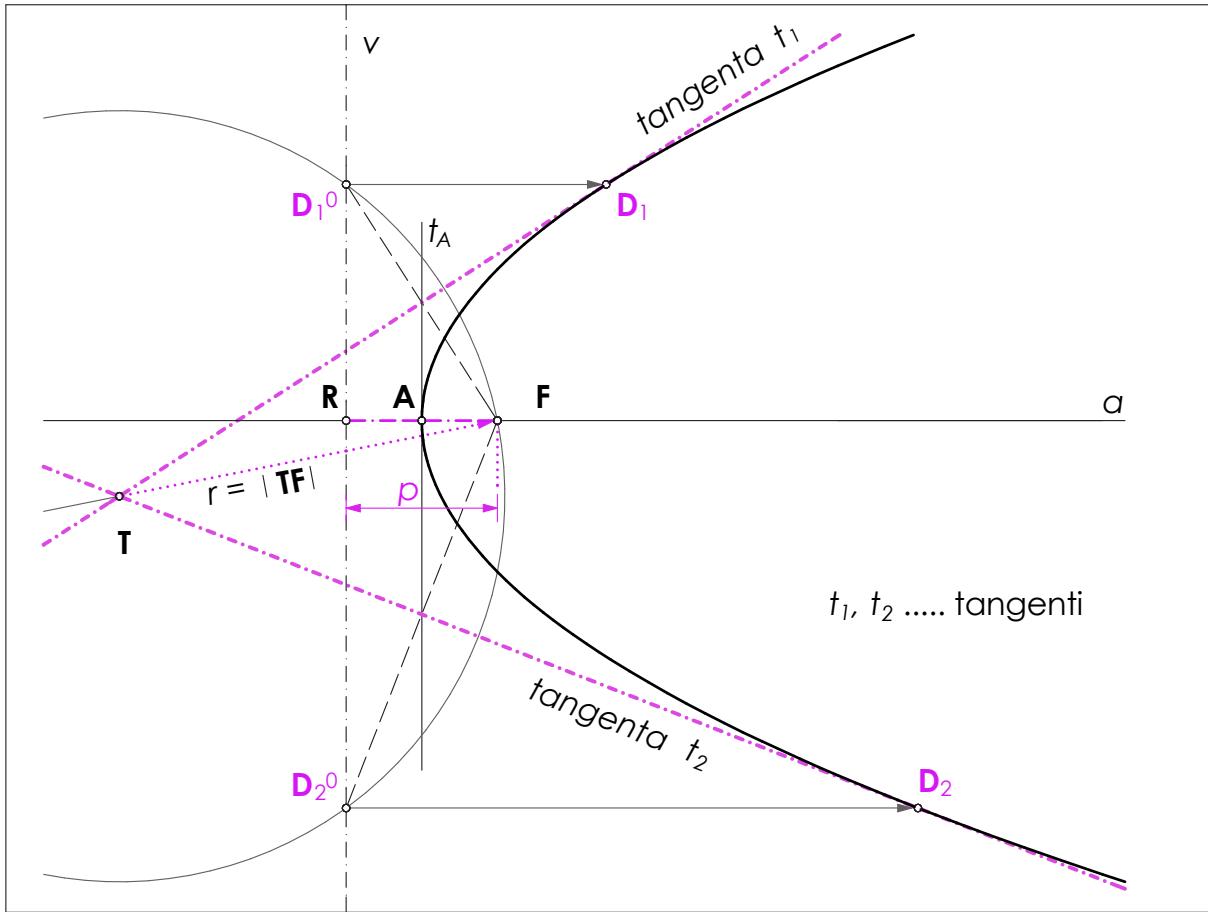


Dana je točka  $D_1$  na dani paraboli z znanim parametrom  $p$ .

Tangenta v dani točki  $D_1$  parabole je simetrala kota (tukaj kota  $\alpha$ ) med prevodnico točke  $D_1$  (razdaljo točke  $D_1$  od gorišča  $F$ ) in vzporednico osi parabole skozi točko  $D_1$ .

Normala v dani točki  $D_1$  parabole je simetrala kota (tukaj kota  $\beta$ ) med vzporednico osi parabole skozi točko  $D_1$  in podaljškom prevodnice točke  $D_1$ . Normala je pravokotna na tangento.

## 9.7 Tangenti na parabolo iz dane zunanje točke

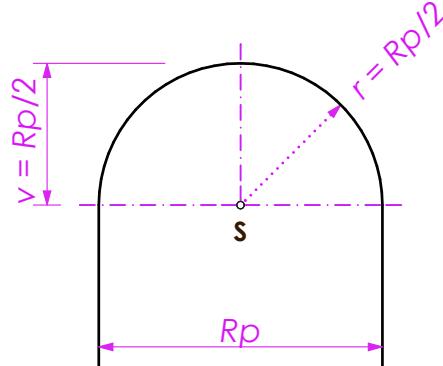


Dani sta parabola z znanim parametrom  $p$  in točka  $T$  zunaj parabole.

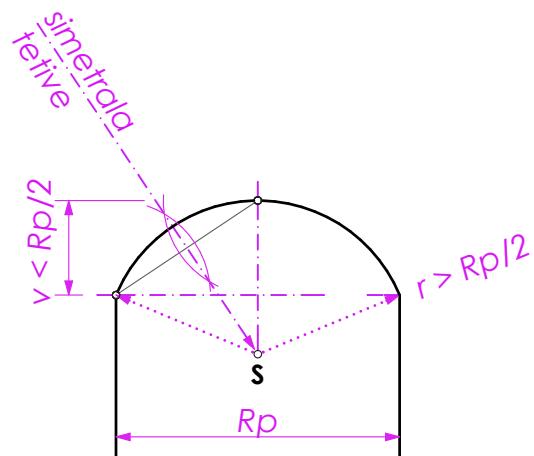
**Konstrukcija dotikalishč in tangent:** Iz dane točke  $T$  zunaj parabole narišemo skozi gorišče  $F$  krožni lok, ki je del Talesove krožnice. Krožni lok preseka premico vodnico v točkah  $D_1^0$  in  $D_2^0$ . Skozi točki  $D_1^0$  in  $D_2^0$  narišemo vzporednici osi parabole. Vzporednici sekata parabolo v dotikalishčih  $D_1$  in  $D_2$ . Premici, ki ju narišemo skozi zunanjo točko  $T$  ter skozi dotikalishči  $D_1$  in  $D_2$ , sta iskani tangentni  $t_1$  in  $t_2$ .

## 10 LOKI V STAVBARSTVU

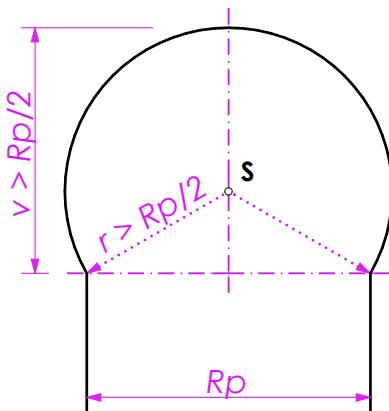
### 10.1 Oblike lokov



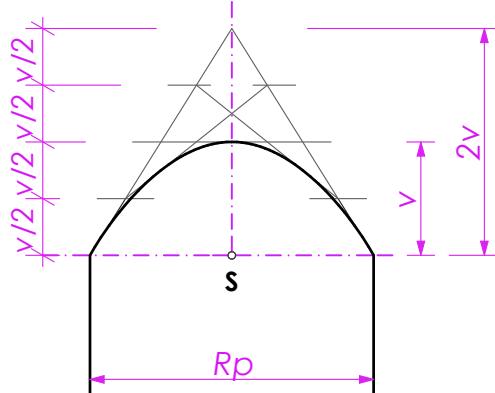
1. POLKROŽNI LOK



2. SEGMENTNI LOK



3. PODKVASTI LOK



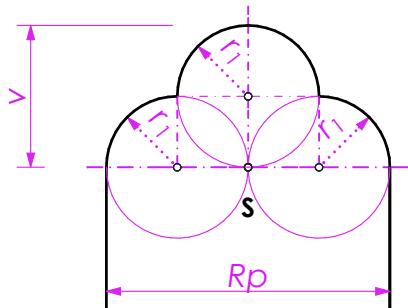
4. HIPERBOLIČNI LOK

$R_p$  ..... razpetina (širina) loka  
 $v$  ..... višina (puščica) loka

**Loki** so konstrukcijski elementi nad zidnimi odprtinami. Ti prevzemajo obremenitve nad odprtinami in jo prenašajo na bočne zidove ali stebre.

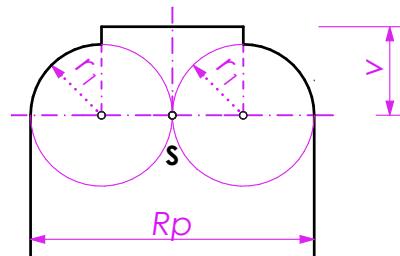
Ločne oblike sestavljajo deli krožnih lokov, elipse ali parbole. Pri risarskih konstrukcijah lokov uporabljamo pravila, ki veljajo za risanje krožnih lokov, elips ali parabol.

## 10.2 Oblike lokov

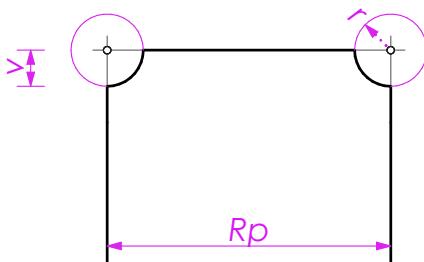


**5. DETELJIČASTI LOK:**

oblikovna različica - deteljičasti lok s tremi ločnimi odseki enakega polmera

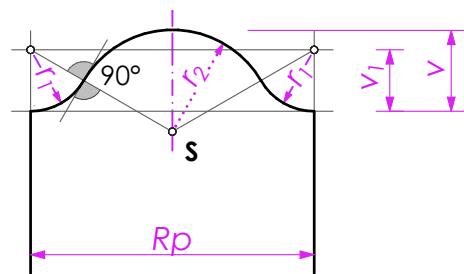


**6. RAMENSKI LOK  
/KONZOLNI LOK/**



**7. RAMENSKI LOK  
/KONZOLNI LOK/:**

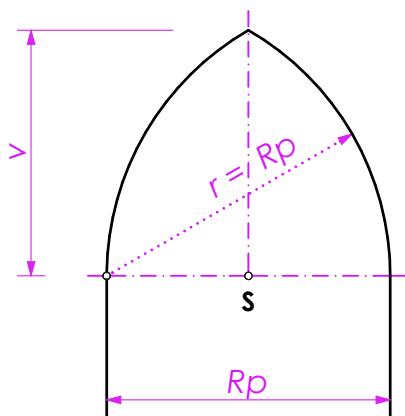
oblikovna različica



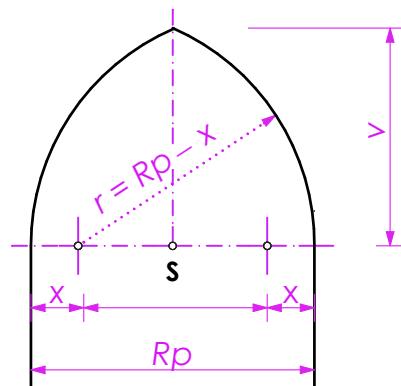
**8. KONVEKSNI LOK**

$R_p$  ..... razpetina (širina) loka  
v ..... višina (puščica) loka

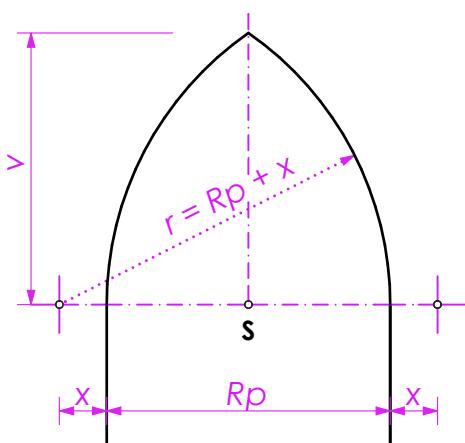
### 10.3 Oblike lokov



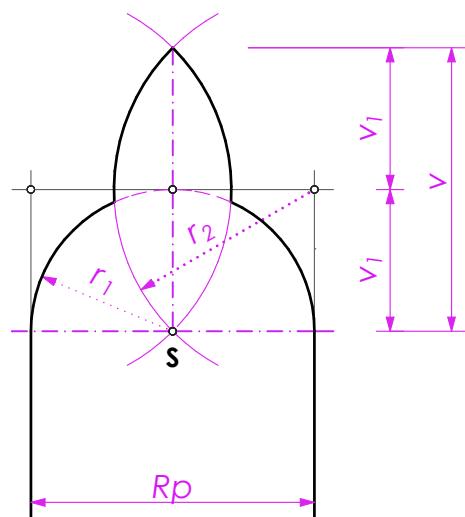
**9. ŠILASTI LOK:**  
navadna,  
enakostranična  
oblika



**10. ŠILASTI LOK:**  
sploščena,  
stisnjena oblika



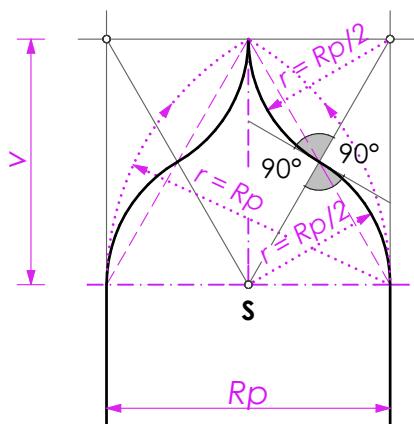
**11. ŠILASTI LOK:**  
povišana,  
suličasta oblika



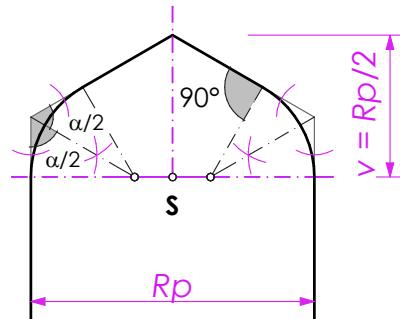
**12. ŠILASTI LOK:**  
oblikovna  
različica

$Rp$  ..... razpetina (širina) loka  
 $v$  ..... višina (puščica) loka

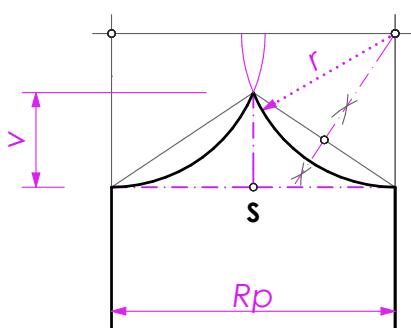
#### 10.4 Oblike lokov



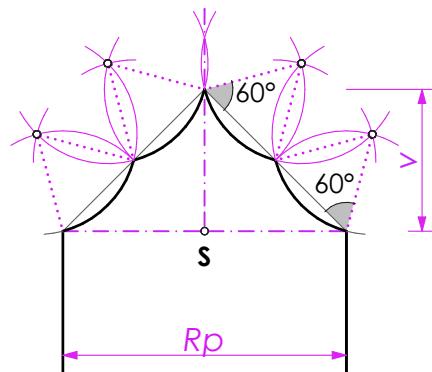
**13. HRBTIČASTI LOK**



**14. ŠILASTI LOK:**  
oblikovna različica



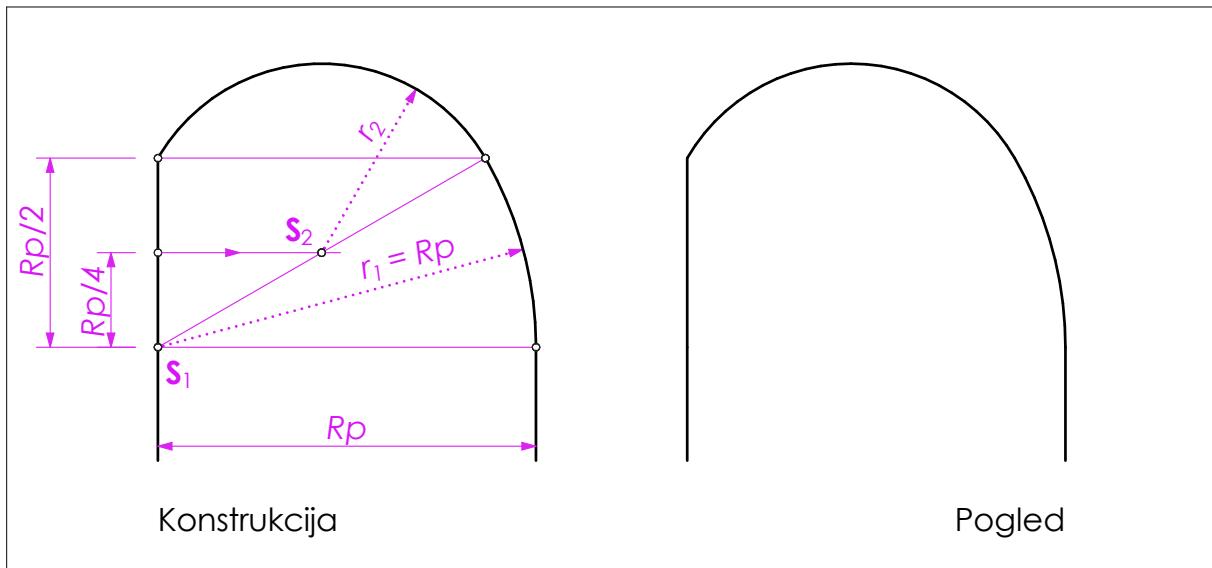
**15. ZASTORASTI LOK**



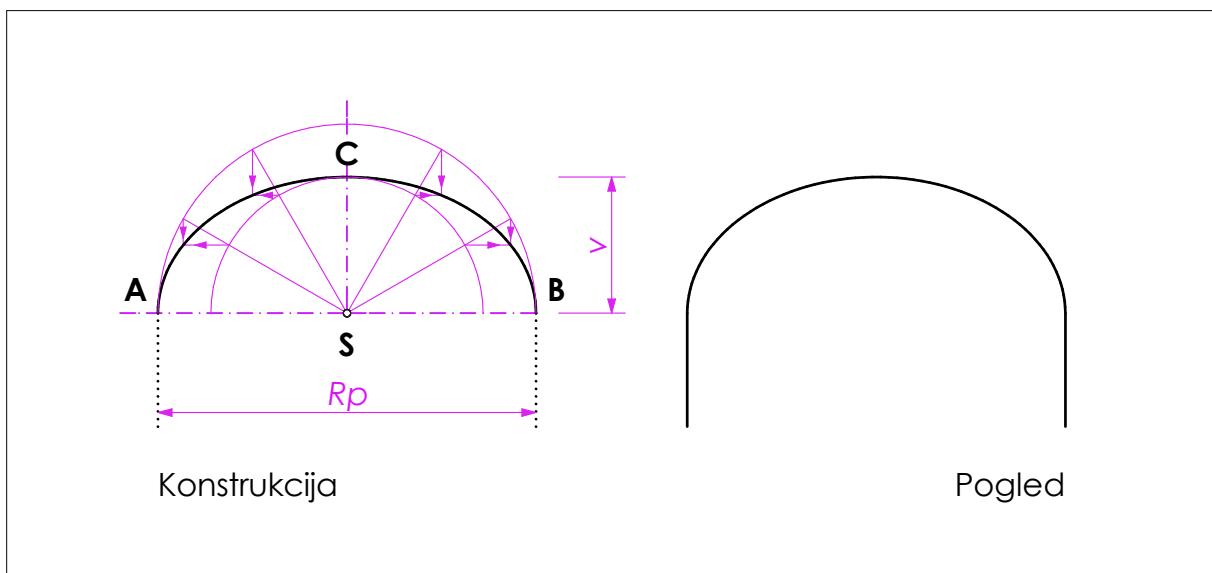
**16. ZASTORASTI LOK:**  
oblikovna različica -  
zastorasti lok oblikujejo  
štirje enaki ločni odseki

$Rp$  ..... razpetina (širina) loka  
 $v$  ..... višina (puščica) loka

### 10.5 Dvigajoči lok



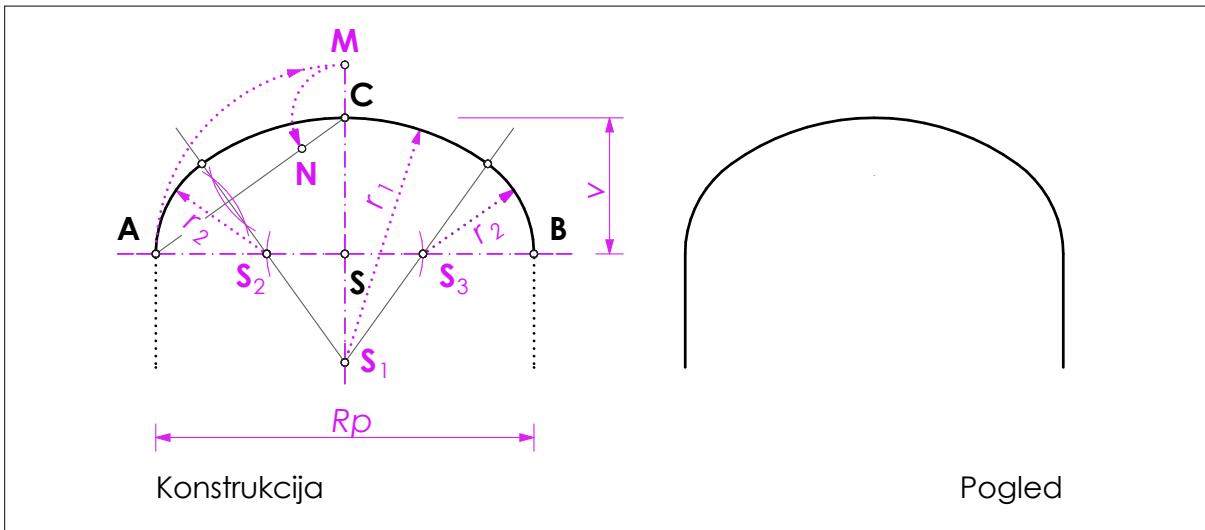
### 10.6 Eliptični lok



*Eliptični lok je enak polovici krivulje elipse z znano veliko osjo (razpetina loka  $R_p$ ) in malo polosjo (višina loka  $v$ ).*

Za risanje eliptičnega loka uporabimo eno izmed risarskih metod za konstruiranje elipse. Na sliki je narisana zgornja polovica elipse s pomočjo velike in male krožnice, ki smo jo opisali pod točko 6.4.

## 10.7 Košarasti lok – 1. način konstrukcije



$R_p$  = razpetina košarastega loka ..... velika os **AB** košarastega loka

$v$  = višina košarastega loka ..... mala polos **SC** košarastega loka

Košarasti lok je enak polovici krivulje ovala. Za njegovo oblikovanje smo uporabili konstrukcijo ovala, ki je opisana pod točko 7.1

Znani sta razpetina košarastega loka  $R_p$  in njegova višina  $v$ .

Nanesemo razpetino  $R_p$  košarastega loka, ki je hkrati tudi velika os **AB** ovala.

V sredini **S** razpetine **AB** narišemo pravokotnico in na njej odmerimo višino  $v$  košarastega loka, ki je hkrati tudi mala polos **SC** ovala.

Na podaljšek male osi nanesemo polovico velike osi, da dobimo točko **M**.

Narišemo tetivo **AC** in na njej odmerimo dolžino **CM, da dobimo točko **N**.**

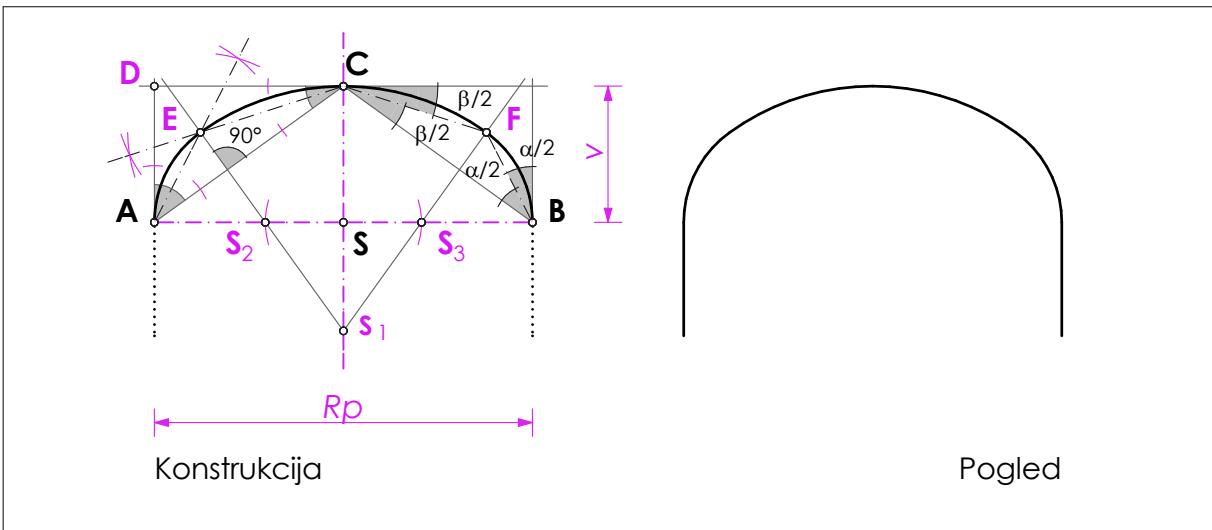
Narišemo simetralo daljice **AN**. Simetrala seka veliko os **AB** v središču **S<sub>2</sub>** in podaljšek polosi (**S**, **C**) v središču **S<sub>3</sub>**. Središče **S<sub>3</sub>** dobimo z zrcaljenjem središča **S<sub>2</sub>** čez središče **S** košarastega loka. Skozi središči **S<sub>1</sub>** in **S<sub>3</sub>** narišemo premico (**S<sub>1</sub>, S<sub>3</sub>**).

Narišemo krožni lok s središčem v točki **S<sub>1</sub>** in s polmerom  $r_1$  skozi teme **C** do premice (**S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>**) in premice (**S<sub>1</sub>, S<sub>3</sub>**).

Narišemo krožni lok s središčem v točki **S<sub>2</sub>** in s polmerom  $r_2$  skozi teme **A** do premice (**S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>**) in krožni lok s središčem v točki **S<sub>3</sub>** in s polmerom  $r_2$  skozi teme **B** do premice (**S<sub>1</sub>, S<sub>3</sub>**).

Krožni loki s središči v točkah **S<sub>1</sub>**, **S<sub>2</sub>** in **S<sub>3</sub>** se stikajo na premicah (**S<sub>1</sub>, S<sub>2</sub>**) in (**S<sub>1</sub>, S<sub>3</sub>**) ter povezujejo temena **A**, **C** in **B** v košarasti lok.

### 10.8 Košarasti lok – 2. način konstrukcije



$Rp$  = razpetina košarastega loka ..... velika os **AB** košarastega loka  
 $v$  = višina košarastega loka ..... mala polos **SC** košarastega loka

Za njegovo oblikovanje lahko uporabimo tudi naslednjo konstrukcijo ovala:

Znani sta razpetina košarastega loka  $Rp$  in njegova višina  $v$ .

Nanesemo razpetino  $Rp$  košarastega loka, ki je hkrati tudi velika os **AB** ovala.

V sredini **S** razpetine **AB** narišemo pravokotnico in na njej odmerimo višino  $v$  košarastega loka, ki je hkrati tudi mala polos **SC** ovala.

Skozi teme **C** narišemo vzporednico veliki osi **AB**, skozi teme **A** pa narišemo pravokotnico na veliko os **AB**. V pravokotniku **ASCD** narišemo skozi temeni **A** in **C** diagonalo.

Narišemo simetrali kota **DAC** in kota **ACD**. Simetrali se sekata v točki **E**.

Iz točke **E** narišemo pravokotnico na diagonalo **AC**. Pravokotnica seka veliko os **AB** v središču **S<sub>2</sub>** in podaljšek polosi (**S**, **C**) v središču **S<sub>1</sub>**. Središče **S<sub>3</sub>** dobimo z zrcaljenjem središča **S<sub>2</sub>** čez središče **S** košarastega loka.

Skozi središči **S<sub>1</sub>** in **S<sub>3</sub>** narišemo premico (**S<sub>1</sub>, S<sub>3</sub>**) in na njej odmerimo razdaljo **S<sub>1</sub>F**, ki je enaka razdalji **S<sub>1</sub>E**.

Središča **S<sub>1</sub>**, **S<sub>2</sub>** in **S<sub>3</sub>** so središča krožnih lokov, ki povezujejo točke **A**, **E**, **C**, **F** in **B** v košarasti lok.

**VIRI IN LITERATURA**

Vilko Niče: DESKRIPTIVNA GEOMETRIJA. Školska knjiga, Zagreb, 1963.

Milan Radin: OPISNA GEOMETRIJA I. Mladinska knjiga, Ljubljana, 1967.

Milan Radin: OPISNA GEOMETRIJA II. Mladinska knjiga, Ljubljana, 1967.

Lojze Šubert: PLANIMETRIJSKE KONSTRUKCIJE. Ljubljana, 1979.

Kollars/Müllner: DARSTELLENDE GEOMETRIE. Hölder-Pichler-Tempsky, Dunaj, 1996.

Dominik Palman: GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE. Element, Zagreb, 1996.

Dahmlos/Witte: BAUZEICHNEN. Schroedel Schulbuchverlag GmbH, Hannover, 1996.

Michael Sewell: Mathematics Masterclasses. Oxford University Press, 1997.