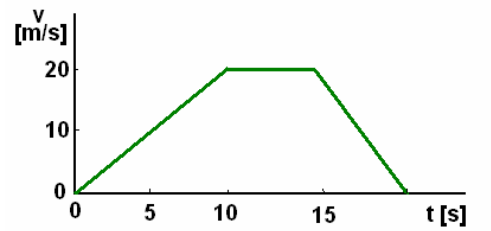
1. Avto, ki v začetku miruje, odpelje s pospeškom 2 m/s^2. Po desetih sekundah pospeševanja pelje pet sekund enakomerno. Nato enakomerno zavira, dokler se ne ustavi. Zaviranje traja pet sekund. Kolikšno pot prevozi?

Najprej izračunajmo največjo hitrost v_0, $v_0 = at = 2m/s^2.10s = 20\ m/s$ in narišimo digram hitrosti v odvisnosti od časa.



Prevožena pot je enaka ploščini trapeza na sliki. Srednjica je »dolga« 12,5 sekunde, višina pa 20 m/s. Prevožena pot je torej 250 m.

2. Avtomobilu enakomerno naraste hitrost s 54 km/h na 72 km/h v štirih sekundah. Kolikšno pot prevozi v tem času?

Najprej pretvorimo enoti. Hitrost avtomobila na začetku opazovanja je 15 m/s, na koncu opazovanja pa 20 m/s. Pri enakomerno pospešenem ali pojemajočem gibanju je pot kar enaka produktu povprečne hitrosti in časa, pri čemer je povprečna hitrost polovica vsote začetne in končne hitrosti. V našem primeru je povprečna hitrost 17,5 m/s, čas pospeševanja pa 4 s. Prevožena pot je torej 70 m.

3. Cvetlični lonček pade z balkona, ki je 10 m nad gornjim robom okna. Okno je visoko 1m. Koliko časa leti lonček mimo okna? Kolikšna je hitrost lončka, ko leti mimo sredine okna? Za g vzemimo g = 10 m/s^2.

Najprej izračunajmo hitrost. Višinska razlika je 10,5 m. Hitrost je torej enaka $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{210 m^2/s^2} = 14{,}5 m/s$.

Čas leta Δt lahko izračunamo kot razliko dveh časov: časa t_2, v katerem prileti lonček do spodnjega roba okna in časa t_1, v katerem prileti lonček do gornjega roba okna. V našem primeru je $t_2 = \sqrt{2h_2/g} = 1{,}483 s$ *in* t_1 *= 1,414 s. Čas leta mimo okna je torej $\Delta t = 0{,}069$ s.*

Ker je višina okna (Δh = 1m) majhna v primerjavi z višinsko razliko (h = 10 m) med gornjim robom okna in balkonom, lahko čas Δt izračunamo tudi z diferenciranjem izraza za čas leta t: $t = \sqrt{2h/g}$. *Velja* $dt = (dt/dh)dh = dh/\sqrt{2gh}$.

Enačbo prepišemo za večji spremembi Δt in Δh: $\Delta t = (dt/dh)\Delta h = \Delta h/\sqrt{2gh}$.

Enačba pove, za koliko (Δt) se podaljša čas leta, če se višinska razlika poveča za Δh. Pri tem se zavedamo, da slednja enačba ni več natančna in da je natančnost izračunanega časa Δt tem večja, čim manjše je razmerje $\Delta h/h$. V našem primeru dobimo Δt = 0,071 s, kar se za 3% razlikuje od prej izračunanega časa. Če v izrazu za Δt vzamemo za h srednjo višinsko razliko, h = 10,5 m, dobimo precej boljše ujemanje.

4. S kolikšno začetno hitrostjo moramo z 10 m visokega balkona v smeri navpično navzdol vreči kamen, da bo zadel tla s hitrostjo 20 m/s? Kako dolgo traja let kamna?

Najprej izračunajmo začetno hitrost v_0. Velja $v^2 = v_0^2 + 2gh$, iz česar dobimo v_0 = 14 m/s. Čas leta izračunamo iz enačbe $h = v_0t + gt^2/2$ z rešitvijo $t = (-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh})/g$. Upoštevamo le pozitivno rešitev z znakom + pred korenom in dobimo t = 0,6 s.

***Tudi negativna rešitev ni čisto brez pomena. Predstavlja čas, ob katerem bi moral s tal z ravno pravo hitrostjo in v smeri navpično navzgor odleteti kamen, da bi bil ob času nič v višini balkona in bi imel hitrost v_0 v smeri navpično navzdol.*

5. Z 10 m visokega balkona spustimo kamen. S kolikšno hitrostjo moramo pol sekunde kasneje z mesta pod balkonom vreči drug kamen navpično navzgor, da se bosta srečala na polovični višini?

Označimo višino balkona s h_0, začetno hitrost drugega kamna z v_0, zakasnitev meta drugega kamna pa s t_0. Časovni potek višine prvega kamna je enak: $h_1 = h_0 - gt^2/2$. Višina drugega kamna je ob času t ($t>t_0$) enaka: $h_2 = v_0(t-t_0) - g(t-t_0)^2/2$. Prvi kamen je na polovični višini ob času $t = \sqrt{h_0/g} = 1\text{s}$. Tedaj je tudi drugi kamen na isti višini $h_2 = h_0/2$, če je v_0 = 12,5 m/s.

*** Kot varianto te naloge izračunajte, kdaj in v kateri višini se srečata kamna, če je začetna hitrost drugega kamna 8 m/s! (t = 1,17 s, h = 3,1 m)*

6.Pospešek telesa ni vedno konstanten. Oglejmo si podrobneje tri zglede. Telo naj bo v začetku opazovanja v izhodišču ($s_0 = 0$). Začetna hitrost telesa naj bo v_0. Pospešek telesa naj bo

i) $a = kt$

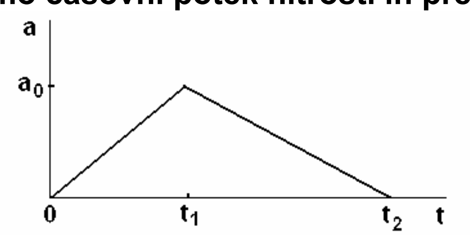
ii) $a=a_0\sin\omega t$

iii) $a=a_0e^{-\lambda t}$.

Izračunajmo časovni potek hitrosti in odmika od izhodišča.

i)	$v = v_0 + kt^2/2$	$s = v_0t + kt^3/6$
ii)	$v = v_0 + (a_0/\omega)(1-\cos\omega t)$	$s = (v_0 + a_0/\omega)t - (a_0/\omega^2)\sin\omega t$
iii)	$v = v_0 + (a_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t})$	$s = (v_0 + a_0/\lambda)t - (a_0/\lambda^2)(1 - e^{-\lambda t})$

7. Časovni potek pospeška telesa, ki v začetku miruje, podaja naslednja slika. Izračunajmo časovni potek hitrosti in premika iz začetne lege.



Pri računanju časovnih potekov hitrosti in premika posebej obravnavamo tri časovne intervale: $t<t_1$ (i), $t_1<t<t_2$ (ii) in $t>t_2$ (iii).

i) Na prvem časovnem intervalu je pospešek enak a = $a_0(t/t_1)$, začetna hitrost pa je nič. Zato velja v = $a_0t^2/2t_1$ in s = $a_0t^3/6t_1$. Na koncu intervala je hitrost $v(t_1)$ = $a_0t_1/2$, premik pa $s(t_1) = a_0t_1^2/6$.
ii) Na drugem časovnem intervalu je pospešek enak a = $a_0(t_2-t)/(t_2-t_1)$. Hitrost telesa je enaka $v = v(t_1) + \int_{t_1}^{t} a\,dt = \frac{a_0t_2}{2} - \frac{a_0(t_2-t)^2}{2(t_2-t_1)}$. *Na koncu drugega intervala je hitrost $v(t_2)$ = $a_0t_2/2$. Časovni potek premika je:* $s = s(t_1) + \int_{t_1}^{t} v\,dt =$

$$= \frac{a_0(t_2-t)^3}{6(t_2-t_1)} - \frac{a_0t_2(t_2-t)}{2} + \frac{a_0t_2(2t_2-t_1)}{6}.$$

Na koncu intervala je premik $s(t_2)$ = $a_0t_2(2t_2-t_1)/6$.
iii) Ko je $t>t_2$ pospeška ni. Gibanje je enakomerno s hitrostjo $v(t_2)$, premik telesa iz začetne lege pa je enak s = $s(t_2) + v(t_2)(t-t_2)$.

8. Klado porinemo po naoljeni vodoravni podlagi. Pri tem dobi hitrost v_0 = 2 m/s. Zaradi viskoznosti olja se potem klada giblje pojemajoče s pospeškom a = -kv, pri čemer je k =0,5 s^{-1} . Po kolikšnem času pade kladi hitrost na desetino začetne vrednosti? Kako daleč od začetne lege se klada ustavi?
Upoštevajmo, da je pospešek odvod hitrosti po času: a = dv/dt = -kv. Ločimo spremenljivki: dv/v = -kdt. Enačba pove, da je v zelo kratkem časovnem intervalu dt relativna sprememba hitrosti dv/v enaka –kdt. Daljši časovni interval od časa 0 do poljubnega časa t razdelimo na množico kratkih časovnih intervalov in seštejemo (integriramo!) relativne spremembe hitrosti: $\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_{0}^{t} k\,dt$. *Zgornja integracijska meja levega integrala predstavlja hitrost v ob času t, spodnja pa hitrost ob času 0. Z integracijo dobimo $\ln(v/v_0) = -kt$, oziroma $v = v_0e^{-kt}$. Hitrost klade pade na desetino začetne vrednosti, ko je e^{-kt} = 0,1, oziroma t = (ln10)/k = 4,6 s.*

Premik klade od začetka do časa t je enak $s = \int_{o}^{t} v\,dt = (v_0/k)(1-e^{-kt})$. *Pri izračunu celotne poti klade vzamemo t = ∞ in dobimo s = v_0/k = 4 m.*

9.Izstrelek odleti iz točke na tleh, ki je od 10 m visokega zidu oddaljena 20 m, z začetno hitrostjo 20 m/s. Kolikšen mora biti kot med začetno smerjo leta izstrelka in vodoravno podlago, da izstrelek zleti preko zidu? Kolikšna je najmanjša začetna hitrost, pri kateri izstrelek zleti preko zidu? (g = 10 m/s)
Izhodišče postavimo v začetno točko. Višino zidu označimo s h, oddaljenost od izhodišča pa z s. Pri poševnem metu velja x = $v_0t\cos\alpha$ in y = $v_0t\sin\alpha - gt^2/2$. Izstrelek leti preko zidu, ko je pri x = s višina y večja od h. Pogoj x=s je izpolnjen ob času t = $s/(v_0\cos\alpha)$. Tedaj je višina izstrelka enaka y = $s\,\mathrm{tg}\alpha - (gs^2/2v_0^2)/\cos^2\alpha$. Izračunajmo, pri katerih kotih α je y ravno enak h. Z upoštevanjem zveze $1+\mathrm{tg}^2\alpha$

$= 1/\cos^2\alpha$ dobimo kvadratno enačbo za $tg\alpha$: $Atg^2\alpha - Btg\alpha + A + 1 = 0$. Da je manj pisanja smo vpeljali dva brezdimenzijska parametra A in B: $A = gs^2/2v_0^2h$, $B = s/h$. Enačba ima pri dovolj veliki začetni hitrosti dve rešitvi: $tg\alpha = \left[B \pm \sqrt{B^2 - 4A(1+A)}\right]/2A$. Pri majhnih začetnih hitrostih je A velik, izraz pod korenom pa negativen. Enačba tedaj nima rešitve. Najmanjšo začetno hitrost dobimo tako, da izračunamo A, pri katerem je izraz pod korenom 0. Enak je $A = \left[\sqrt{1+B^2} - 1\right]/2$. Kot, ki ustreza temu metu, je enak $\alpha = arctg\left[\left(\sqrt{1+B^2} + 1\right)/B\right]$. V našem primeru je B=2, $\alpha = 58^0$, najmanjša začetna hitrost pa 18 m/s. Začetna hitrost v nalogi (v_0 = 20 m/s) je večja od najmanjše začetne hitrosti, zato je problem rešljiv. Pri podatkih iz naloge je A = 0,5 in B = 2. Temu ustrezata mejna kota $\alpha_1 = 45^0$ in $\alpha_2 = 71{,}6^0$. Izstrelek bo letel čez zid, ko bo $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$.

10. S tal 10 m visokega tunela izstrelimo izstrelek pod kotom α z začetno hitrostjo 30 m/s. Kolikšen mora biti kot α, da bo izstrelek padel na tla najdlje?

Predpostavimo, da je začetna hitrost izstrelka dovolj velika, da ta lahko zadene strop tunela višine h ($v_0^2 > 2gh$). V našem primeru je ta pogoj izpolnjen. Izračunajmo kot $\alpha = \alpha_0$, pri katerem se izstrelek v svoji najvišji točki ravno dotakne stropa tunela. Tedaj je $v_0^2 \sin^2\alpha_0/2g = h$.

V splošnem je dolžina leta s enaka $s = (v_0^2/g)\sin 2\alpha$. Narašča do kota $\alpha = 45^0$, nato pa pada. Če je kot α_0 večji od 45^0 ($2gh < v_0^2 < 4gh$) pa tudi če je $v_0^2 < 2gh$, bo največja dolžina leta $s = v_0^2/g$ dosežena pri $\alpha = 45^0$. V našem primeru je $\alpha_0 = 28^0 < 45^0$, zato je let najdaljši pri kotu α_0. Dolžina leta je enaka

$$s = 4h\sqrt{\frac{v_0^2}{2gh} - 1} = 74{,}8m.$$

11. Z vrha klanca z nagibom $\alpha = 30^0$ vržemo v vodoravni smeri kamen z začetno hitrostjo v_0=20 m/s. Kako daleč pade kamen na tla? Za koliko se poveča dolžina meta, če povečamo začetno hitrost za Δv_0=0,2 m/s? Za koliko bi se povečala dolžina meta , če bi bil nagib klanca večji za $\Delta\alpha = 0{,}1^0$?

Izhodišče koordinatnega sistema postavimo na vrh klanca. Os x je vodoravna, os y pa kaže navpično navzgor. V tem koordinatnem sistemu opiše klanec funkcija y = -kx, pri čemer je $k = tg\alpha$. Pri vodoravnem metu velja $x = v_0t$ in $y = -gt^2/2$. Ko kamen zadene tla velja $-gt^2/2 = -kv_0t$. Rešitvi enačbe sta dve. Ena je seveda t=0, kar ustreza začetni točki, rešitev, ki jo iščemo pa je $t = 2kv_0/g$. Ko kamen zadene tla, je $x = 2kv_0^2/g$ in $y = -2k^2v_0^2/g$. Dolžina meta s je torej

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = 54{,}3m.$$

Povečanje dolžine meta pri majhnem povečanju začetne hitrosti najlaže izračunamo z diferenciranjem izraza za s: $ds = \frac{4v_0dv_0}{g}\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2s}{v_0}dv_0$, *ki ga*

smemo uporabiti tudi pri neinfinitezimalnih spremembah začetne hitrosti, če je le $\Delta v_0 << v_0$. Velja torej $\Delta s = (2s/v_0)\Delta v_0 = 1{,}1$ m.
Z diferenciranjem poiščemo tudi spremembo dolžine meta, ko se kot α spremeni za $\Delta\alpha$. Z natančnostjo velikostnega reda $\Delta\alpha/\alpha$ velja $\Delta s = \frac{2v_0^2}{g}\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos^3\alpha}\Delta\alpha = 0{,}27\,m$. Pri izračunu moramo spremembo kota $\Delta\alpha$ izraziti v radianih.

12. Z vozila, ki se po vodoravni podlagi giblje s hitrostjo v* = 20 m/s, izstrelimo izstrelek pod kotom $\alpha = 30^0$ glede na vozilo in sicer v smeri gibanja vozila. Začetna hitrost izstrelka je v_0 =40 m/s. Kako dolgo leti izstrelek? Kako daleč od vozila pade izstrelek na tla? Kolikšna je razdalja med mestom izstrelitve in mestom, kjer izstrelek zadene tla in pri katerem kotu α je ta razdalja največja? Zračni upor zanemarimo.

Problem obravnavamo v dveh opazovalnih sistemih. Najprej naj bo opazovalni sistem vezan na vozilo, izhodišče pa naj bo na mestu izstrelitve. Če zanemarimo zračni upor, lahko gibanje izstrelka, ko ga opazujemo z vozila, obravnavamno kot poševni met. Čas leta je enak $t = (2v_0/g)\sin\alpha = 4$ s. Dolžina »meta« je enaka $s = (v_0^2/g)\sin(2\alpha) = 139$ m. Izstrelek pade na tla 139 m od vozila. Ker v času leta izstrelka vozilo prevozi pot $s^* = v^*t = 80$ m, je razdalja D med mestom izstrelitve in mestom, kjer izstrelek zadene tla, enaka $D = s+s^* = 219$ m.
Obravnavajmo problem še v mirujočem opazovalnem sistemu. Izhodišče postavimo na mesto izstrelitve, os x koordinatnega sistema naj bo usmerjena v smeri gibanja vozila, os y pa navpično navzgor. Začetna hitrost izstrelka v smeri osi x je enaka $v^* + v_0\cos\alpha$, v smeri osi y pa $v_0\sin\alpha$. Za mirujočega opazovalca odleti izstrelek pod kotom β, $\beta = \mathrm{arctg}[v_0\sin\alpha/(v^* + v_0\cos\alpha)] = 20{,}1^0$, in ne pod kotom α. Začetna hitrost izstrelka, v_Z, je odvisna od α in sicer velja $v_Z^2 = v_0^2 + v^{*2} + 2v_0v^*\cos\alpha$. Čas leta, $t = (2v_0/g)\sin\alpha = 4$ s, je enak, kot v gibajočem se opazovalnem sistemu. To seveda ni presenečenje, saj je v klasični fiziki čas enak v vseh opazovalnih sistemih. Oddaljenost mesta, kjer pade izstrelek na tla, od mesta izstrelitve je $D = (v^* + v_0\cos\alpha)t = 219$ m. Seveda sta tudi razdalji v obeh opazovalnih sistemih enaki.
Izračunajmo še, pri katerem α je razdalja D največja in kolikšna je. Velja $D = (v_0^2/g)\sin2\alpha + (2v_0v^*/g)\sin\alpha = (v_0^2/g)[\sin2\alpha + \varepsilon\sin\alpha]$. Vpeljali smo brezdimenzijski parameter $\varepsilon = 2v^*/v_0$. Razdalja D je največja, ko je odvod $dD/d\alpha$ enak nič. To velja pri kotu α, ki je podan z enačbo $\cos\alpha = (\sqrt{32+\varepsilon^2} - \varepsilon)/8$. V našem primeru je $\varepsilon=1$, $\alpha = 53{,}6^0$ in največja razdalja D= 282 m.
** Sami obravnavajte primer, ko odleti izstrelek v drugi smeri, na primer v nasprotni smeri gibanja ali pravokotno na smer gibanja vozila!*

13. Centrifugi v petih sekundah frekvenca vrtenja enakomerno naraste z 10 Hz na 20 Hz. Kolikšen je kotni pospešek? Kolikokrat se centrifuga v tem času zasuka?

Kotni pospešek je enak $\alpha = \Delta\omega/\Delta t = 2\pi\Delta\nu/\Delta t = 12{,}6\ s^{-2}$.

Kot zasuka $\Delta\phi$ izračunamo kot produkt povprečne kotne hitrosti (2π15Hz) in časa. Enak je 75.2π. Število zasukov je torej 75.

14.Vztrajnik, ki v začetku miruje, se začne vrteti neenakomerno pospešeno s pospeškom $\alpha = \alpha_0 \sin^2 \Omega t$. Izračunajmo časovni potek kotne hitrosti in zasuka.

Najprej zapišimo kotni pospešek v obliki $\alpha = (\alpha_0/2) - (\alpha_0/2)\cos(2\Omega t)$. Prvi člen predstavlja povprečni kotni pospešek, drugi pa nihanje kotnega pospeška okrog povprečne vrednosti.

Kotna hitrost ob času t je enaka $\omega(t) = \int_0^t \alpha(t)dt = \frac{\alpha_0}{2}t - \frac{\alpha_0}{4\Omega}\sin(2\Omega t)$. V prvem členu spoznamo enakomerno naraščanje kotne hitrosti, ki je enako produktu povprečnega kotnega pospeška in časa. Drugi člen, ki predstavlja odmik od »povprečnega obnašanja« je v primerjavi s prvim členom tem manjši, čim daljši je čas pospeševanja. Pri dolgih časih, ko je $t >> 1/\Omega$, ga lahko zanemarimo.

Podobno je z zasukom. Velja $\varphi(t) = \int_0^t \omega(t)dt = \frac{\alpha_0}{4}t^2 - \frac{\alpha_0}{8\Omega^2}\left[1 - \cos(2\Omega t)\right]$. Pri dolgih časih ($t >> 1/\Omega$) zasuk dovolj dobro opišemo s prvim členom, ki predstavlja vrtenje s povprečnim kotnim pospeškom, pri krajših časih pa je treba upoštevati tudi drugi člen.

15. Oglejmo si enakomerno pojemajoče kroženje v primeru, ko je kotni pospešek odvisen od kotne hitrosti. Začetna kotna hitrost naj bo ω_0, kotni pospešek pa
i) α = -Aω
ii) α = -Bω^2.

i) Ker je $\alpha = d\omega/dt$, dobimo enačbo $d\omega/dt = -A\omega$. Enačbo delimo z ω in množimo z dt, da ločimo spremenljivki. Dobimo: $d\omega/\omega$ = -Adt. Enačbo integriramo po kotni hitrosti od ω_0 do ω, po času pa od nič do t: $\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = \int_0^t -Adt$. Pri tem predstavlja integracijska meja ω kotno hitrost ob času t. Rezultat integracije je $\omega = \omega_0 e^{-At}$. Kotna hitrost eksponentno pada proti nič z značilnim časom 1/A. Zasuk do časa t je enak $\varphi = \int_0^t \omega dt = \frac{\omega_0}{A}(1 - e^{-At})$. Do tedaj, ko se telo ustavi, je zasuk enak ω_0/A.

ii)Postopamo podobno kot v prejšnjem primeru. Enačbo $d\omega/dt = -B\omega^2$ delimo z ω^2 in množimo z dt, da ločimo spremenljivki. Pri tem dobimo enačbo $d\omega/\omega^2 = -Bdt$. Enačbo integriramo po času od 0 do t, ko se kotna hitrost spremeni z vrednosti ω_0 na ω. Rezultat je $\omega = \omega_0/(1 + \omega_0 Bt)$. Pri daljših časih je kotna hitrost obratno sorazmerna času. Poglejmo še, kako se s časom spreminja zasuk φ: $\varphi = \int_0^t \omega dt = \frac{1}{B}\ln(1 + \omega_0 Bt)$. Vrtenje se nikoli ne ustavi in pri dolgih časih gre φ proti neskončno. To seveda kaže, da je primer (ii) model, ki ga lahko uporabimo *le pri dovolj veliki kotni hitrosti. Pri zelo majhni kotni hitrosti model ne popisuje realne situacije. Model (ii) lahko na primer povežemo z zračnim uporom in nastopa pri velikih kotnih hitrostih, model (i) pa z viskoznim uporom v ležajih, ki prevlada pri manjših kotnih hitrostih*.

16. Na vztrajnik deluje stalen navor, v osi pa navor viskozne sile tako, da je kotni pospešek vztrajnika $\alpha = \alpha_0 - A\omega$. Vztrajnik v začetku miruje. Izračunajmo časovni potek kotne hitrosti in zasuka.

Podobno kot v prejšnjem primeru zapišemo enačbo $d\omega/dt = \alpha_0 - A\omega$. *Enačbo delimo z* $\alpha_0 - A\omega$ *in množimo z dt, da ločimo spremenljivki. Dobljeno enačbo integriramo po času od nič do t in po kotni hitrosti. Času nič ustreza kotna hitrost nič, času t pa kotna hitrost* ω: $\int_0^{\omega} \frac{d\omega}{\alpha_0 - A\omega} = \int_0^t dt$. *Kot rezultat integriranja dobimo* $\omega = (\alpha_0/A)(1 - e^{-At})$. *Kotna hitrost narašča in se eksponentno z značilnim časom* $\tau = 1/A$ *približuje vrednosti* α_0/A, *pri kateri je* $\alpha = 0$. *V času* $\tau = 1/A$ *naraste kotna hitrost na* $1 - 1/e \approx 2/3$ *končne vrednosti, pospešek pa pade z začetne vrednosti* α_0 *na vrednost* $\alpha_0/e \approx \alpha_0/3$. *Pri kratkih časih* ($t \ll \tau$) *lahko člen* $A\omega$ *v izrazu za kotni pospešek zanemarimo. Kotna hitrost je tedaj kar enaka* $\alpha_0 t$. *Do enakega rezultata pridemo, če v izrazu za kotno hitrost razvijemo* e^{-At} *v Taylorjevo vrsto po potencah At , upoštevamo, da je* $At \ll 1$ *in obdržimo najmočnejši neničelni člen. Ker velja* $e^{-x} = 1 - x + x^2/2! - x^3/3! + x^4/4!...$, *je* $1 - e^{-At} \approx At$ *in zares dobimo* $\omega \approx \alpha_0 t$.

Zasuk dobimo z integriranjem kotne hitrosti po času: $\varphi = \int_0^t \omega dt = \frac{\alpha_0}{A^2}\left(At - 1 + e^{-At}\right)$.

Po dolgem času ($At = t/\tau \gg 1$) *je zasuk približno enak* $(\alpha_0/A)t$, *kar ustreza vrtenju s stalno kotno hitrostjo* α_0/A. *Pri kratkih časih* ($At \ll 1$) *je vrtenje približno enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom* α_0, *zato je zasuk približno enak* $\alpha_0 t^2/2$. *Do enakega rezultata pridemo, če razvijemo v izrazu za* φ *eksponentno funkcijo* e^{-At} *v Taylorje*vo vrsto in obdržimo najmočnejši neničelni člen.